Le misure e gli errori

L'errore non è uno sbaglio: nessuna misura è esatta. L'incertezza dice quanto possiamo fidarci del valore, e senza di lei una misura è soltanto un numero.



Il valore vero non lo conosciamo, ma sappiamo in quale intervallo cade.

La scrittura della misura

Una misura si scrive sempre con tre ingredienti: il **valore**, l'**incertezza** (chiamata anche *errore assoluto*) e l'**unità di misura**.

$$x = (x_M \pm \Delta x) \text{ unità}$$

Il valore vero sta fra $x_M - \Delta x$ e $x_M + \Delta x$: è l'**intervallo di indeterminazione**, ampio $2\Delta x$.

Valore e incertezza hanno **la stessa unità** e finiscono **alla stessa cifra decimale**. Le parentesi servono a far valere l'unità per tutti e due.

Quale Δx devo usare?

Dipende da come si è ottenuta la misura.

Misura diretta

una sola lettura sullo strumento

valore: quello letto
Δx: **errore di sensibilità** (§ 1)

Serie di misure

la stessa misura ripetuta più volte

valore: il valore medio
Δx: **semidispersione** (§ 2)

Misura indiretta

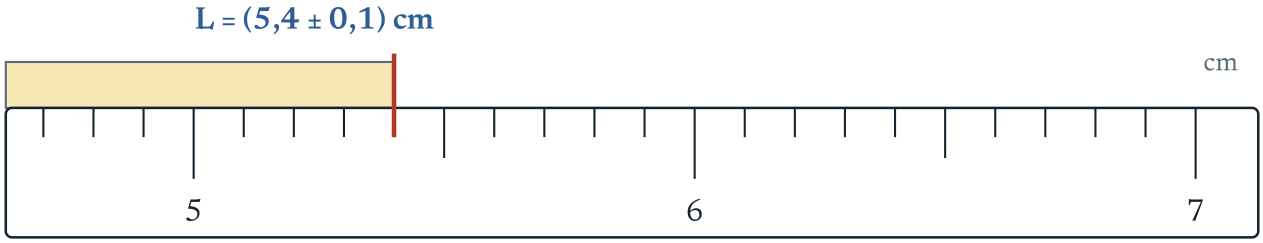
calcolata con una formula da altre misure

valore: quello calcolato
Δx: **propagazione degli errori** (§ 6)

1 L'errore di sensibilità

La **sensibilità** di uno strumento è la più piccola variazione che riesce a rilevare: la **distanza fra due divisioni consecutive** della scala. In una misura diretta è proprio lei l'incertezza.

$$\Delta x = \frac{\text{ampiezza del tratto}}{\text{numero di divisioni}}$$



da 5 cm a 6 cm: 10 divisioni

Fra 5 cm e 6 cm ci sono 10 divisioni: Δx = 1 cm : 10 = 0,1 cm. L'asticella arriva alla quarta tacca dopo il 5.

Qualche strumento

righello: fra 0 cm e 1 cm, 10 divisioni Δx = 1 cm : 10 = 0,1 cm

bilancia a lancetta: fra 100 g e 200 g, 20 divisioni Δx = 100 g : 20 = 5 g

cilindro graduato: fra 50 mL e 60 mL, 5 divisioni Δx = 10 mL : 5 = 2 mL

Strumento digitale. Δx vale **1 sull'ultima cifra** che compare sul display: se il cronometro segna 12,48 s, l'ultima cifra è quella dei centesimi e Δx = 0,01 s.

La **portata** è un'altra cosa: è il valore massimo che lo strumento può misurare.

2 L'errore tra più misure

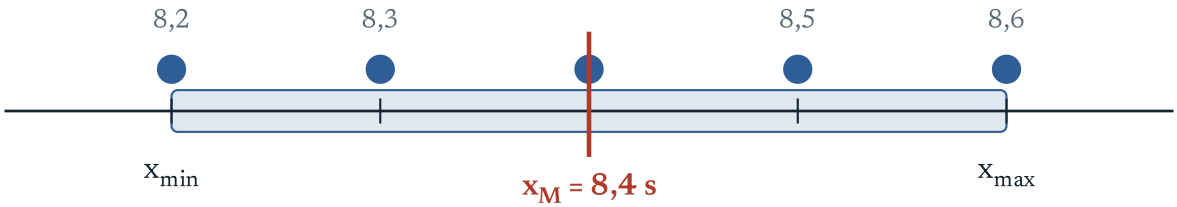
Ripetendo la stessa misura i valori cambiano un po': gli **errori casuali** (i riflessi, la posizione dell'occhio, piccole correnti d'aria...) agiscono ora per eccesso, ora per difetto. Facendo la media si compensano in parte.

Valore medio

$$x_M = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}$$

Semidispersione (o errore massimo)

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$



$\Delta x = (8{,}6 - 8{,}2) : 2 = 0{,}2$ s

Le misure stanno tutte dentro l'intervallo che va dal valore minimo al valore massimo; il valore medio è nel mezzo.

Misuro cinque volte un tempo: 8,3 s · 8,5 s · 8,2 s · 8,6 s · 8,4 s

$x_M = 42{,}0 : 5 = 8{,}40$ s somma divisa per il numero delle misure

$\Delta x = (8{,}6 - 8{,}2) : 2 = 0{,}2$ s massimo meno minimo, diviso 2

$t = (8{,}4 \pm 0{,}2)$ s il valore si ferma ai decimi, come Δx

Misure tutte uguali? La semidispersione viene 0, ma l'incertezza non è mai nulla: si usa l'**errore di sensibilità**. Lo stesso vale se la semidispersione è più piccola della sensibilità dello strumento.

3 L'errore relativo

L'incertezza da sola non dice se una misura è buona: 1 mm è tanto sullo spessore di una moneta e niente sulla lunghezza di un'aula. Per giudicare la **precisione** si confronta l'incertezza con il valore.

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta x}{x_M} \qquad \varepsilon_{\%} = \varepsilon_r \cdot 100\ \%$$

Formule inverse: $\Delta x = \varepsilon_r \cdot x_M$ e $x_M = \Delta x : \varepsilon_r$.

La misura **più precisa** è quella con l'errore relativo **minore**.

Stessa incertezza, precisione diversa

$L_1 = (2{,}0 \pm 0{,}1)$ cm $\varepsilon_r = 0{,}1 : 2{,}0 = 0{,}0500 = 5{,}00\ \%$

$L_2 = (50{,}0 \pm 0{,}1)$ cm $\varepsilon_r = 0{,}1 : 50{,}0 = 0{,}00200 = 0{,}200\ \%$

L_2 è più precisa 0,1 cm pesa molto meno su 50 cm

Formula inversa: un tempo di 80 s ha un errore relativo dello 0,5 %

$\Delta x = 0{,}005 \cdot 80 = 0{,}4$ s 0,5 % = 0,005

t = (80,0 ± 0,4) s

L'errore relativo è un **numero puro**, senza unità di misura: per questo permette di confrontare anche grandezze diverse, come una lunghezza e un tempo. Nei calcoli si scrive con **3 cifre significative**.

4 Le cifre significative

Sono le **cifre certe più la prima cifra incerta**. Si contano a partire dalla prima cifra diversa da zero.

Numero	Cifre sign.	Perché
34,2	3	tutte le cifre contano
0,0081	2	gli zeri iniziali non contano: servono solo a mettere la virgola
0,0402	3	lo zero in mezzo conta
5,60	3	lo zero finale dopo la virgola conta: dice che anche i centesimi sono stati misurati
$1{,}20 \cdot 10^3$	3	si contano le cifre prima di $\cdot\ 10^n$

Cifre significative e cifre decimali sono cose diverse: 69,572 ha 3 cifre decimali e 5 cifre significative.

5 L'arrotondamento

La calcolatrice dà sempre troppe cifre: tenerle tutte vorrebbe dire dichiarare una precisione che non abbiamo. Si arrotonda in quest'ordine.

1. **Prima l'incertezza:** tienila con **una sola cifra significativa**.
2. **Poi il valore:** fermati alla **stessa posizione** dell'ultima cifra dell'incertezza.

Se la prima cifra eliminata è 5, 6, 7, 8 o 9 si arrotonda per eccesso; se è 0, 1, 2, 3 o 4 per difetto.

$x_M = 23{,}4781$ g $\Delta x = 0{,}0362$ g

$\Delta x \rightarrow 0{,}04$ g una cifra significativa: i centesimi

$x = (23{,}48 \pm 0{,}04)$ g anche il valore si ferma ai centesimi

$x_M = 1283{,}6$ m $\Delta x = 47{,}2$ m

$\Delta x \rightarrow 50$ m una cifra significativa: le decine

$x = (1280 \pm 50)$ m anche il valore si ferma alle decine

6 La propagazione degli errori

Quando una grandezza si calcola da altre misure (un'area, una velocità, una densità) anche le loro incertezze entrano nel risultato. Le regole sono due.

Somma e differenza: si sommano le incertezze

$$\Delta x(A \pm B) = \Delta x(A) + \Delta x(B)$$

Anche nella differenza le incertezze **si sommano sempre**: togliendo una misura dall'altra i dubbi non si cancellano.

$a = (8{,}4 \pm 0{,}2)$ m $b = (3{,}2 \pm 0{,}1)$ m

$\Delta x = 0{,}2 + 0{,}1 = 0{,}3$ m vale per la somma e per la differenza

$a + b = (11{,}6 \pm 0{,}3)$ m $a - b = (5{,}2 \pm 0{,}3)$ m

Prodotto e quoziente: si sommano gli errori relativi

$$\varepsilon_r(A \cdot B) = \varepsilon_r(A : B) = \varepsilon_r(A) + \varepsilon_r(B)$$

Poi si torna all'incertezza: $\Delta x = \varepsilon_r \cdot$ *valore calcolato*.

Velocità media v = s : t con s = (120,0 ± 0,5) m e t = (15,0 ± 0,1) s

$v_M = 120{,}0 : 15{,}0 = 8{,}00$ m/s 1. il valore

$\varepsilon_r(v) = 0{,}5 : 120{,}0 + 0{,}1 : 15{,}0 = 0{,}00417 + 0{,}00667 = 0{,}0108$ 2. si sommano gli ε_r

$\Delta x = 0{,}0108 \cdot 8{,}00 = 0{,}086$ m/s → 0,09 m/s 3. di nuovo un'incertezza, poi si arrotonda

v = (8,00 ± 0,09) m/s

Casi particolari

Operazione	Regola	Esempio
multiplo $k \cdot A$, con k numero esatto	$\Delta x(k \cdot A) = k \cdot \Delta x(A)$	perimetro del quadrato: $4 \cdot (5{,}0 \pm 0{,}1)$ cm = $(20{,}0 \pm 0{,}4)$ cm
quadrato $A^2 = A \cdot A$	$\varepsilon_r(A^2) = 2 \cdot \varepsilon_r(A)$	area del quadrato
cubo $A^3 = A \cdot A \cdot A$	$\varepsilon_r(A^3) = 3 \cdot \varepsilon_r(A)$	volume del cubo

Un numero esatto, come il 500 dei fogli di una risma o il 4 dei lati di un quadrato, non ha incertezza: dividendo per 500 si divide per 500 anche l'incertezza.

7 I calcoli senza incertezza

Se dei dati abbiamo solo i numeri, senza incertezza, il risultato non può comunque essere più preciso dei dati.

Operazione	Il risultato ha...	Esempio
+ −	tanti **decimali** quanti il dato che ne ha meno	12,41 + 3,2 = 15,61 → 15,6
· :	tante **cifre significative** quante il dato che ne ha meno	2,5 · 3,21 = 8,025 → 8,0

Una misura indiretta in quattro passi

1. **Calcola il valore** con la formula, senza arrotondare.
2. **Trova l'incertezza:** se nella formula c'è + o − somma le incertezze; se c'è · o : somma gli errori relativi, poi $\Delta x = \varepsilon_r \cdot valore$.
3. **Arrotonda** prima l'incertezza (una cifra significativa), poi il valore (stessa posizione).

4 **Scrivi** la misura con le parentesi e l'unità.

Area di un disegno di base (25,0 ± 0,1) cm e altezza (12,0 ± 0,1) cm

$A = 25{,}0 \cdot 12{,}0 = 300\ cm^2$ 1. valore

$\varepsilon_r = 0{,}1 : 25{,}0 + 0{,}1 : 12{,}0 = 0{,}00400 + 0{,}00833 = 0{,}0123$ 2. prodotto: si sommano gli ε_r

$\Delta x = 0{,}0123 \cdot 300 = 3{,}7\ cm^2 \rightarrow 4\ cm^2$ 3. arrotondo

$A = (300 \pm 4)\ cm^2$ 4. scrivo

Errori da evitare

- Troppe cifre nel valore: *(12,348 ± 0,1) cm* è sbagliato, si scrive *(12,3 ± 0,1) cm*, con la stessa ultima cifra.
- Incertezza con troppe cifre: *$\Delta x = 0{,}0362$ g* va arrotondata a *$\Delta x = 0{,}04$ g*, una sola cifra significativa.
- Parentesi dimenticate: in *245 ± 1 g* l'unità resta attaccata solo all'1; si scrive *(245 ± 1) g*.
- Nel prodotto sommare le incertezze: *nel prodotto sommo i Δx*, invece *nel prodotto sommo gli ε_r*.
- Nella differenza sottrarre le incertezze: *nella differenza sottraggo i Δx*, invece *sommo i Δx anche lì*.
- Dare un'unità all'errore relativo: *$\varepsilon_r = 0{,}02$ cm* è sbagliato, *$\varepsilon_r = 0{,}02$* è un numero puro.

Da tenere a mente

- Una misura è **valore ± incertezza**, tra parentesi, con l'unità: *$x = (x_M \pm \Delta x)$* unità.
- Una lettura: errore di sensibilità. Più letture: valore medio e semidispersione. Un calcolo: propagazione.
- Somma e differenza sommano i Δx; prodotto e quoziente sommano gli ε_r.
- Si arrotonda prima Δx (una cifra significativa), poi il valore (stessa posizione).
- È più precisa la misura con l'errore relativo minore, non quella con l'incertezza più piccola.

Scheda di fisica — le misure e gli errori. Si usa insieme al formulario guida e al laboratorio interattivo con gli esercizi.