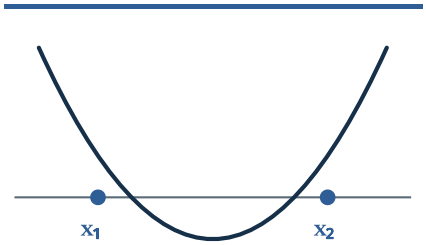
# Disequazioni di secondo grado, fratte e sistemi

Il discriminante dice quante soluzioni ha un'equazione di secondo grado; la parabola dice dove un trinomio è positivo o negativo. Con la tabella dei segni si risolvono le disequazioni fratte, con lo schema delle soluzioni i sistemi.

## 1 Quante soluzioni? Il discriminante

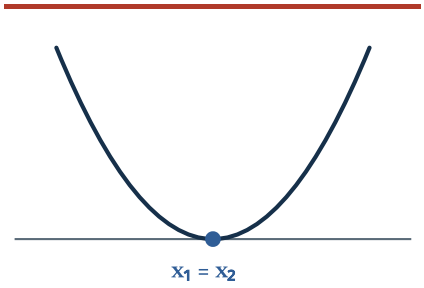
Data l'equazione in **forma normale** $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, il numero di soluzioni si capisce **senza risolverla**: basta il segno del discriminante.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$



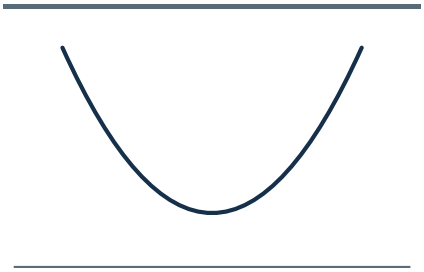

### $\Delta > 0$

Due soluzioni **reali e distinte**: $x_1 \neq x_2$. La parabola taglia l'asse $x$ in due punti.




### $\Delta = 0$

Due soluzioni **reali e coincidenti**: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. La parabola è tangente all'asse $x$.



### $\Delta < 0$

**Nessuna soluzione reale**: l'equazione è **impossibile** in $\mathbb{R}$. La parabola non incontra l'asse $x$.

**Due scorciatoie.**

- Se $b$ è **pari** si può usare il *discriminante ridotto* $\frac{\Delta}{4} = (\frac{b}{2})^2 - ac$: ha lo stesso segno di $\Delta$ e i conti sono più piccoli.
- Se $a$ e $c$ hanno **segni opposti**, allora $-4ac > 0$ e quindi $\Delta > 0$ sempre: due soluzioni distinte, senza fare conti.

**Esempio a**

$2x^2 - 5x + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \rightarrow$ due soluzioni distinte $(x = \frac{1}{2}\ ;\ x = 2)$.

**Esempio b**

$4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 36 - 36 = 0 \rightarrow$ due soluzioni coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$.

**Esempio c**

$x^2 + 2x + 5 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 1 - 5 = -4 < 0 \rightarrow$ impossibile in $\mathbb{R}$.

**Esempio d**

$3x^2 + 7x - 2 = 0$

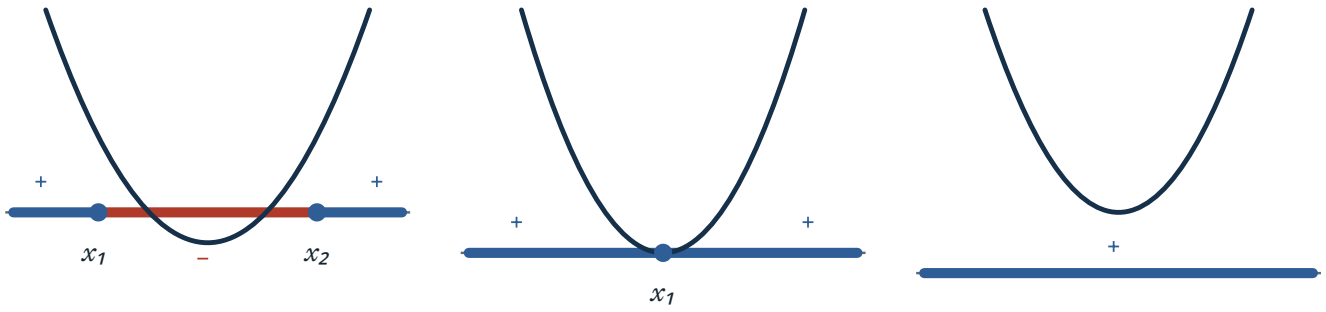
$a = 3$ e $c = -2$ sono discordi $\rightarrow \Delta > 0$: due soluzioni distinte, senza calcolare.

Attenzione: prima di calcolare $\Delta$ l'equazione va portata in forma normale (tutto al primo membro, termini simili sommati). In $x^2 = 6x - 9$ i coefficienti sono $a = 1,\ b = -6,\ c = 9$, non $c = -9$.

## 2 Disequazioni di secondo grado

Per risolvere $ax^2 + bx + c > 0$ (oppure $<, \geq, \leq$) si guarda dove la parabola $y = ax^2 + bx + c$ sta **sopra** l'asse $x$ ($y > 0$) o **sotto** ($y < 0$).

1. **Forma normale con $a > 0$.** Porta tutto al primo membro e riduci. Se $a$ è negativo, moltiplica per $-1$ e **cambia il verso**.
2. **Equazione associata.** Risolvi $ax^2 + bx + c = 0$: il discriminante dice quante radici ci sono.
3. **Disegna la parabola** (verso l'alto, perché $a > 0$) che passa per le radici.
4. **Leggi il grafico** e scrivi le soluzioni: le radici sono comprese solo con $\geq$ e $\leq$.




$\Delta > 0$ $\Delta = 0$ $\Delta < 0$

Con $a > 0$: in blu dove il trinomio è positivo, in rosso dove è negativo.

| con $a > 0$ | $\Delta > 0$<br>radici $x_1 < x_2$ | $\Delta = 0$<br>radice $x_1$ | $\Delta < 0$<br>nessuna radice |
|---|---|---|---|
| $ax^2 + bx + c > 0$ | $x < x_1 \vee x > x_2$<br>*valori esterni* | $x \neq x_1$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| $ax^2 + bx + c \geq 0$ | $x \leq x_1 \vee x \geq x_2$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ | $\forall x \in \mathbb{R}$ |
| $ax^2 + bx + c < 0$ | $x_1 < x < x_2$<br>*valori interni* | impossibile $(\varnothing)$ | impossibile $(\varnothing)$ |
| $ax^2 + bx + c \leq 0$ | $x_1 \leq x \leq x_2$ | $x = x_1$ | impossibile $(\varnothing)$ |

Per ricordarla: con $a > 0$ e $\Delta > 0$ il trinomio ha lo stesso segno di $a$ **fuori** dalle radici e il segno opposto **dentro**.

**Esempio · $\Delta > 0$**

$$x^2 - x - 6 \leq 0$$

$\Delta = 1 + 24 = 25$, $x = \dfrac{1 \pm 5}{2} \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3$. Con ≤ prendo i valori **interni**, radici comprese:




$$S:\ -2 \leq x \leq 3 \quad oppure \quad S = [-2\ ;\ 3]$$

**Esempio · a < 0 e $\Delta = 0$**

$$-x^2 + 6x - 9 < 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - 6x + 9 > 0$$

Ho moltiplicato per $-1$ e cambiato il verso. $\dfrac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$: radice doppia $x = 3$. Il trinomio $(x - 3)^2$ è positivo ovunque tranne in $3$, dove vale zero:

$$S:\ x \neq 3 \quad oppure \quad S = ]-\infty\ ;\ 3[ \cup ]3\ ;\ +\infty[$$

## 3 Disequazioni fratte

Una disequazione è **fratta** quando l'incognita compare al **denominatore**. Non si può moltiplicare per il denominatore come nelle equazioni, perché non ne conosciamo il segno e quindi non sapremmo se il verso cambia. Si studia invece il **segno della frazione**.

1. **Tutto al primo membro** e riduci a una sola frazione: $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$ (o $<, \geq, \leq$). Dall'altra parte deve restare $0$.

2. **Studia il segno** di numeratore e denominatore: risolvi $N(x) > 0$ e $D(x) > 0$. Si scrive sempre $> 0$, qualunque sia il verso della disequazione di partenza.

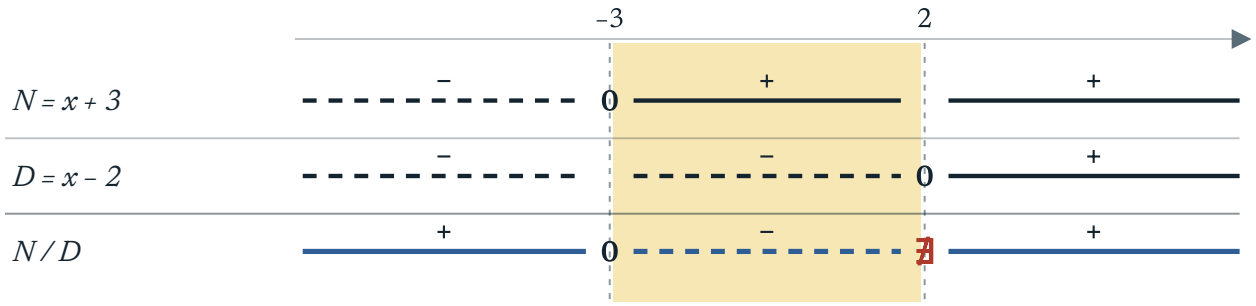
3. **Tabella dei segni**: una riga per ogni fattore, linea continua dove è positivo, tratteggiata dove è negativo. Colonna per colonna applica la regola dei segni.

4. **Scegli gli intervalli** con il segno richiesto. Gli zeri del numeratore si prendono solo con $\geq$ o $\leq$; gli zeri del denominatore **mai** (condizione di esistenza).

### Esempio · da ridurre

$$\frac{2x+1}{x-2} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-2} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-x+2}{x-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-2} \leq 0$$

$N > 0$: $x > -3$ $D > 0$: $x > 2$ C.E. $x \neq 2$



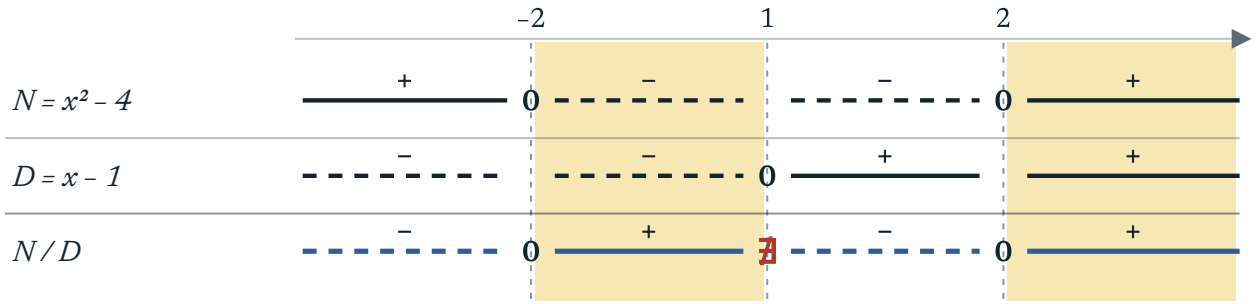

Cerco dove la frazione è **negativa o nulla**: la colonna centrale. $-3$ è compreso (annulla il numeratore), $2$ è escluso (annulla il denominatore).

$$S: \ -3 \leq x < 2 \quad \text{oppure} \quad S = [-3\,;\,2[$$

**Esempio · con un fattore di secondo grado**

$$\frac{x^2 - 4}{x - 1} \geq 0$$

$N > 0$: $x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \vee x > 2$ (valori esterni) $D > 0$: $x > 1$




$S$: $-2 \leq x < 1 \vee x \geq 2$ *oppure* $S = [-2\,;\,1[ \cup [2\,;\,+\infty[$

Lo stesso metodo vale per le **disequazioni prodotto**, come $(x - 1)(x + 4) < 0$ o $x(x^2 - 9) \geq 0$: una riga per ogni fattore, poi la regola dei segni. Lì non c'è denominatore, quindi non ci sono valori da escludere.

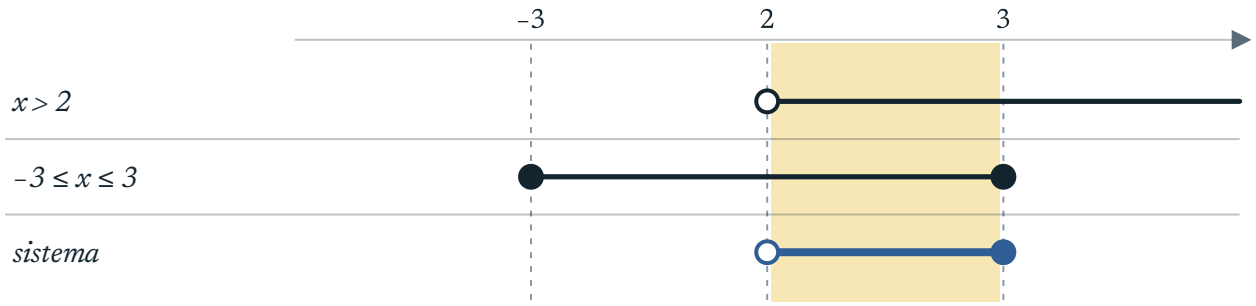
## 4 Sistemi di disequazioni

Un **sistema di disequazioni** chiede i valori di $x$ che rendono vere **tutte** le disequazioni **contemporaneamente**. Le soluzioni sono l'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni.

1. **Risolvi ogni disequazione** per conto suo (di primo grado, di secondo grado, fratta...).
2. **Schema delle soluzioni**: una riga per ogni disequazione, con una linea continua solo dove è **vera**; pallino pieno se l'estremo è compreso, vuoto se è escluso.
3. **Prendi le colonne** in cui **tutte** le righe hanno la linea. Se non ce n'è nessuna, il sistema è impossibile: $S = \varnothing$.

### Esempio

$$\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ x^2 - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

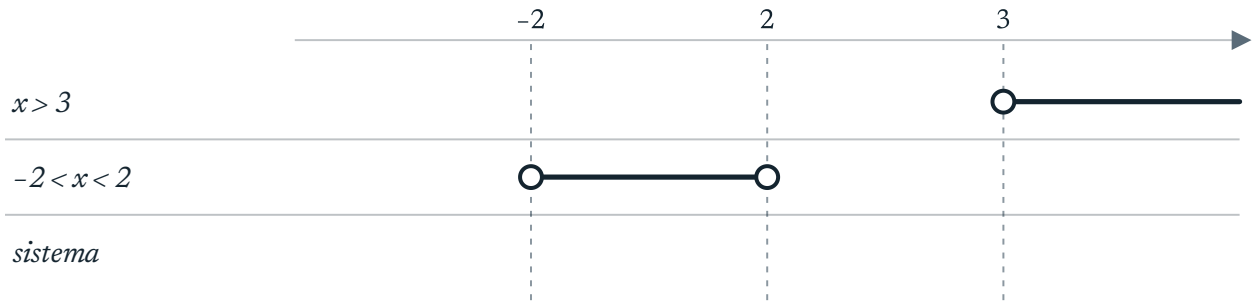



Solo la colonna tra *2* e *3* ha la linea in entrambe le righe. *2* è escluso dalla prima disequazione; *3* va bene per tutte e due.

$$S:\ 2 < x \leq 3 \quad \textit{oppure} \quad S = ]2\ ;\ 3]$$

### Esempio · sistema impossibile

$$\begin{cases} 2x + 1 > 7 \\ x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 2 \end{cases}$$

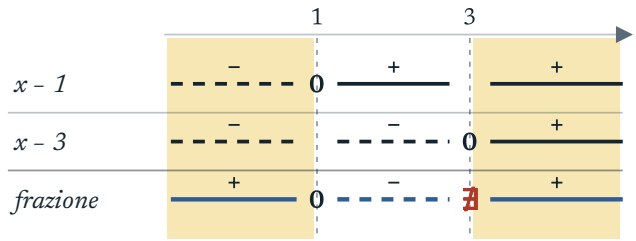



Nessuna colonna ha la linea in tutte e due le righe: $S = \varnothing$.

### Non confondere sistema e disequazione fratta

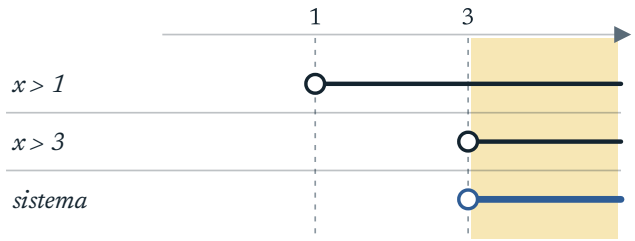
Gli schemi si assomigliano, ma si leggono in modo diverso. Confrontiamo due esercizi con gli stessi fattori $x - 1$ e $x - 3$:

**Fratta** $\frac{x-1}{x-3} > 0$




Si applica la **regola dei segni**: va bene anche dove i due fattori sono entrambi negativi.
*S:* $x < 1 \vee x > 3$.

**Sistema** $\begin{cases} x - 1 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$




Si prende dove sono **vere tutte**: le linee tratteggiate non contano. *S:* $x > 3$.

#### Errori da evitare

- Dividere o moltiplicare per un numero **negativo** senza cambiare il verso.
- Calcolare $\Delta$ prima di aver portato l'equazione in **forma normale**.
- Con $a < 0$ leggere il grafico come se la parabola fosse rivolta verso l'alto: meglio cambiare segno a tutto e invertire il verso.
- Nelle fratte, **moltiplicare per il denominatore** («fare il m.c.m. e toglierlo» come nelle equazioni): il segno del denominatore cambia con $x$.
- Nelle fratte, includere gli zeri del **denominatore** quando il verso è ≥ o ≤: la frazione lì non esiste.
- Nei sistemi, applicare la regola dei segni invece di prendere l'**intersezione**.
- Dimenticare di **verificare**: scegli un numero dentro le soluzioni e uno fuori e sostituiscili nella disequazione di partenza.

Scheda di matematica: discriminante, disequazioni di secondo grado, fratte e sistemi. Prof. Castellina Emiliano, CC BY 4.0: puoi copiarla, modificarla e condividerla citando l'autore.