

Divisione fra polinomi e regola di Ruffini

Dividere due polinomi funziona come dividere due numeri interi: si ottengono un quoziente e un resto. Quando il divisore è del tipo $x - a$, tutto si riduce a una riga di conti.

$$\begin{array}{ccccccc} A & = & B & \cdot & Q & + & R \\ \text{dividendo} & & \text{divisore} & & \text{quoziente} & & \text{resto} \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 \\ &= (x - 2)(2x^2 + x + 6) + 7 \end{aligned}$$

il grado del resto è sempre minore del grado del divisore

Questa uguaglianza è il controllo finale di ogni divisione: se non torna, c'è un errore nei conti.

La divisione fra polinomi

Dati due polinomi A e B , con $B \neq 0$ e di grado non superiore a quello di A , esistono *e sono unici* due polinomi Q (quoziente) e R (resto) tali che:

$$A = B \cdot Q + R \quad \text{con} \quad \text{grado di } R < \text{grado di } B$$

È la stessa struttura della divisione fra numeri interi: $17 = 5 \cdot 3 + 2$, con il resto più piccolo del divisore. Qui il posto della disuguaglianza fra numeri è preso dal confronto fra i gradi.

Se il resto è nullo si dice che A è **divisibile** per B , e allora $A = B \cdot Q$: la divisione diventa una scomposizione in fattori.

Il grado del quoziente è la differenza dei gradi: dividendo un polinomio di grado 3 per uno di grado 1 si ottiene sempre un quoziente di grado 2. Serve per controllare subito la forma del risultato.

La divisione in colonna

Il procedimento ricalca la divisione in colonna dei numeri, con una differenza: si guardano i termini di grado più alto invece delle cifre.

- 1 **Ordina entrambi i polinomi** secondo le potenze decrescenti e scrivi uno 0 al posto dei termini mancanti.
- 2 **Dividi il primo termine** del dividendo per il primo termine del divisore: il risultato è il primo termine del quoziente.
- 3 **Moltiplica** il divisore per quel termine e **sottrai** il prodotto dal dividendo (attenzione: si sottrae, quindi tutti i segni cambiano).
- 4 **Ripeti** con il polinomio ottenuto, finché il suo grado diventa minore di quello del divisore: quello che resta è il resto.

Esempio svolto

Dividiamo $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ per $x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5 & x - 2 \\ -2x^3 + 4x^2 & \hline \hline & 2x^2 + x + 6 \\ & \underline{x^2 + 4x - 5} \\ & -x^2 + 2x \\ & \hline & 6x - 5 \\ & \underline{-6x + 12} \\ & \hline & 7 \end{array}$$

Il quoziente è $2x^2 + x + 6$ e il resto è 7. La verifica consiste nel rifare il prodotto:

$$\begin{aligned} & (x - 2)(2x^2 + x + 6) + 7 \\ &= 2x^3 + x^2 + 6x - 4x^2 - 2x - 12 + 7 \\ &= \mathbf{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5} \text{ coincide con il dividendo } \checkmark \end{aligned}$$

La regola di Ruffini

Quando il divisore è un binomio della forma $x - a$, la divisione in colonna diventa ripetitiva: le lettere non servono più, bastano i coefficienti. La **regola di Ruffini** è proprio questa scorciatoia.

Come si costruisce lo schema

Si scrivono in riga i coefficienti del dividendo, ordinato e completo (con gli zeri al posto dei termini mancanti). A sinistra, fuori dalla riga, si scrive il valore di a , cioè il numero che *annulla* il divisore.

Poi: si abbassa il primo coefficiente; lo si moltiplica per a e si scrive il prodotto sotto il coefficiente successivo; si somma la colonna; si ripete fino alla fine.

Riprendiamo lo stesso esempio: $2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ diviso $x - 2$, quindi $a = 2$.

	2	-3	4	-5
2		4	2	12
	2	1	6	7

$$2 \cdot 2 = 4; -3 + 4 = 1; 1 \cdot 2 = 2; 4 + 2 = 6; 6 \cdot 2 = 12; -5 + 12 = 7$$

L'ultima riga si legge così: l'ultimo numero, isolato dalla riga verticale, è il **resto**; gli altri sono i coefficienti del **quoziente**, che ha grado inferiore di uno rispetto al dividendo.

$$Q = 2x^2 + x + 6, R = 7$$

Lo stesso risultato della divisione in colonna, ottenuto in una riga di conti.

Tre avvertenze

Situazione	Che cosa fare
divisore $x + 3$	Si scrive come $x - (-3)$, quindi $a = -3$. Il segno va sempre cambiato.
$x^4 - 5x + 1$	Mancano i termini di grado 3 e 2: i coefficienti sono $1, 0, 0, -5, 1$.
divisore $2x - 1$	Si usa $a = 1/2$ e alla fine si divide il quoziente per 2, perché $2x - 1 = 2(x - 1/2)$.

La regola di Ruffini vale *solo* per divisori di primo grado. Per dividere per $x^2 + 1$, per esempio, bisogna tornare alla divisione in colonna.

Il teorema del resto

L'enunciato

$$R = P(a)$$

Il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per il binomio $x - a$ è uguale al valore che il polinomio assume per $x = a$.

La dimostrazione sta in una riga. Poiché il divisore ha grado 1, il resto è un numero, e vale $P(x) = (x - a) \cdot Q(x) + R$ per ogni x . Sostituendo $x = a$ il primo prodotto si annulla e rimane appunto $P(a) = R$.

$$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5, \quad a = 2$$

$$P(2) = 16 - 12 + 8 - 5 = 7 \text{ lo stesso resto trovato in due modi diversi } \checkmark$$

È il modo più rapido per conoscere il resto quando il quoziente non interessa: basta una sostituzione, senza fare nessuna divisione.

Il teorema di Ruffini

L'enunciato

$$P(a) = 0 \iff P(x) \text{ è divisibile per } (x - a)$$

Un polinomio è divisibile per $x - a$ se e solo se a è una sua radice, cioè annulla il polinomio.

È la conseguenza diretta del teorema del resto: divisibile significa resto nullo, e il resto è $P(a)$. L'importanza sta nell'uso pratico, perché trasforma la ricerca di una radice in una scomposizione.

Come si cerca la radice

Non si procede a caso. Se il polinomio ha coefficienti interi, le eventuali radici intere vanno cercate fra i **divisori del termine noto**; se il coefficiente del termine di grado massimo non è 1, le radici razionali sono del tipo p/q , con p divisore del termine noto e q del primo coefficiente.

Scomposizione completa

$$\text{Scomponiamo } P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$$

divisori di 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ i candidati

$P(1) = 1 - 2 - 5 + 6 = 0$ trovata: $x = 1$ è radice

Per il teorema di Ruffini $P(x)$ è divisibile per $x - 1$. Applichiamo la regola per trovare il quoziente:

	1	-2	-5	6
1		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

il resto è 0, come previsto: la scomposizione funziona

$P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$ dal quoziente 1, -1, -6

$x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ somma -1, prodotto -6

$P(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

Da qui l'equazione $P(x) = 0$ si risolve a vista: le soluzioni sono 1, 3 e -2. È la ragione per cui Ruffini si studia proprio prima delle equazioni di grado superiore al secondo.

Errori da evitare

- Sbagliare il segno di a : per il divisore $x + 4$ si usa $a = 4$ è sbagliato, si usa $a = -4$.
- Dimenticare gli zeri dei termini mancanti: lo schema di Ruffini ha tante colonne quanti i coefficienti, buchi compresi.
- Nella divisione in colonna, sottrarre cambiando il segno solo al primo termine: vanno cambiati *tutti*.
- Attribuire al quoziente il grado sbagliato: dividendo per $x - a$ il quoziente ha esattamente un grado in meno del dividendo.
- Usare Ruffini con un divisore di secondo grado: $P(x) : (x^2 - 1)$ con lo schema non si può fare (ma si può dividere prima per $x - 1$ e poi per $x + 1$).

Da tenere a mente

- Identità fondamentale: $A = B \cdot Q + R$, con il grado di R minore di quello di B . È anche la verifica.
- Grado del quoziente = grado del dividendo – grado del divisore.
- Ruffini si applica solo a divisori di primo grado del tipo $x - a$.
- Teorema del resto: $R = P(a)$, una sostituzione al posto di una divisione.
- Teorema di Ruffini: $P(a) = 0$ equivale a dire che $(x - a)$ è un fattore di $P(x)$.
- Le radici intere si cercano fra i divisori del termine noto: pochi tentativi, non infiniti.

Scheda di matematica – divisione fra polinomi, regola e teorema di Ruffini.