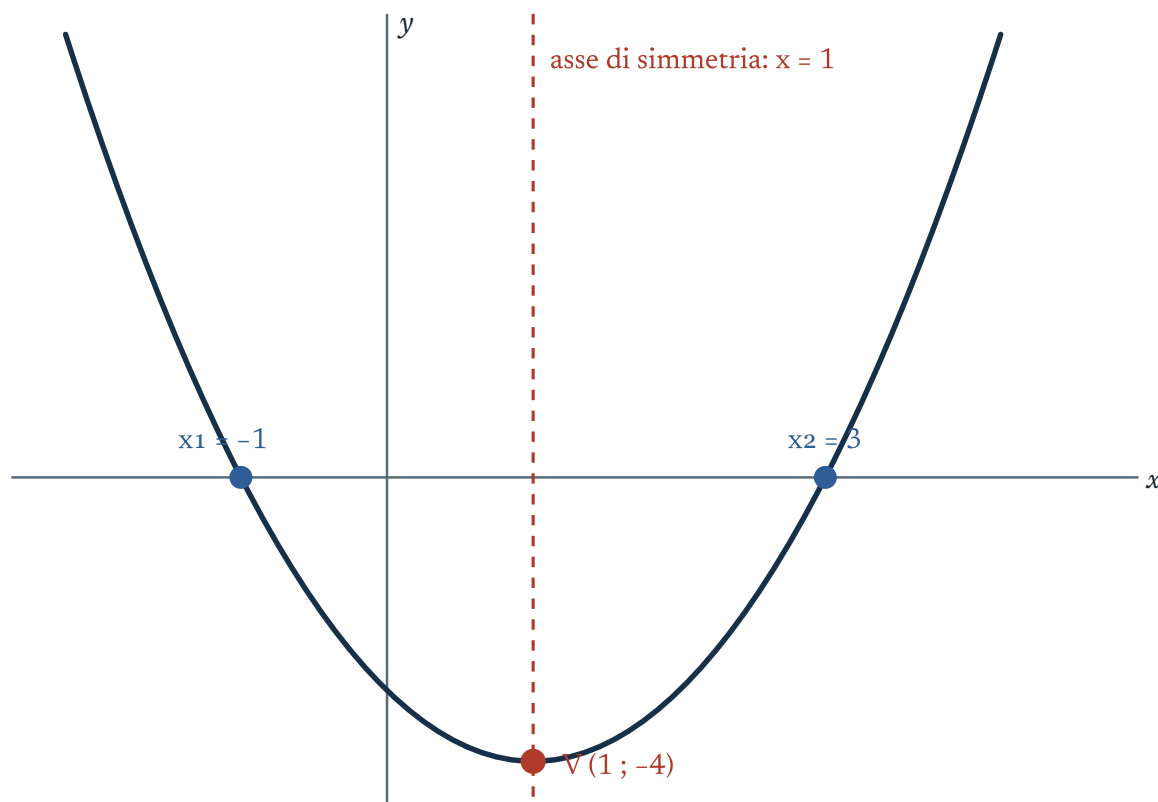


Equazioni di secondo grado

Risolvere $ax^2 + bx + c = 0$ significa cercare i punti in cui una parabola attraversa l'asse delle x . Formula, discriminante, vertice e asse di simmetria in una pagina.



La parabola $y = x^2 - 2x - 3$: le radici dell'equazione sono le ascisse dei punti in cui la curva incontra l'asse x .

La formula risolutiva

Un'equazione è di secondo grado quando può essere scritta in **forma normale**, con $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Le soluzioni si ottengono sempre dalla stessa formula:

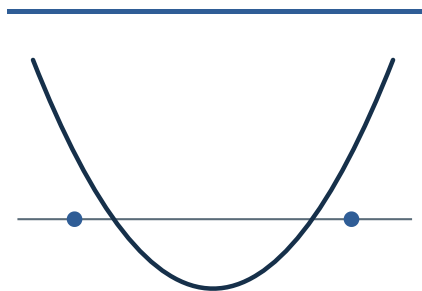
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La quantità sotto radice si chiama **discriminante** e si indica con Δ : è lei a decidere quante soluzioni esistono.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

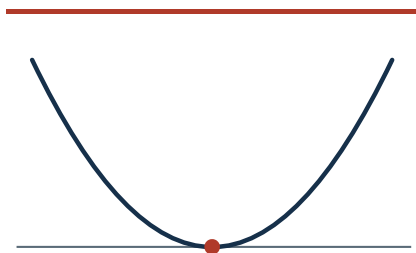
Tre casi, tre disegni

Cambiando solo il termine noto c , la stessa parabola scorre verso l'alto o verso il basso rispetto all'asse x . Ecco cosa succede.



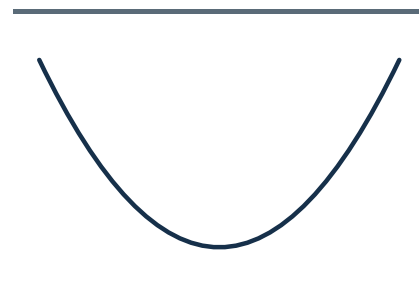
$$\Delta > 0$$

Due soluzioni reali e distinte. La parabola taglia l'asse x in due punti.



$$\Delta = 0$$

Una sola soluzione, contata due volte. La parabola è tangente all'asse x : il vertice lo tocca appena.



$$\Delta < 0$$

Nessuna soluzione reale. La parabola resta tutta sopra (o tutta sotto) l'asse x .

Significato geometrico

All'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ corrisponde la funzione $y = ax^2 + bx + c$, il cui grafico è una **parabola** con asse verticale. Risolvere l'equazione vuol dire chiedersi: *dove vale zero questa funzione?* Cioè: dove la curva incontra l'asse delle x .

Il coefficiente a governa la forma: se $a > 0$ la concavità è rivolta verso l'alto e il vertice è il punto più basso; se $a < 0$ la concavità è verso il basso e il vertice è il punto più alto. Più $|a|$ è grande, più la parabola è stretta.

Vertice e asse di simmetria

Ogni parabola è simmetrica rispetto a una retta verticale che passa per il suo vertice. La sua equazione è:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Il **vertice** è il punto della parabola che sta su quella retta, e le sue coordinate sono:

$$V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

L'ordinata si può sempre ricavare anche per sostituzione: calcolata l'ascissa x_V , basta sostituirla nell'equazione della parabola per ottenere y_V .

La simmetria spiega anche una cosa utile: quando le soluzioni esistono, il vertice sta esattamente a metà fra loro, perché x_V è la media di x_1 e x_2 .

Un esempio completo

Risolvi $x^2 - 2x - 3 = 0$ e disegniamo la sua parabola: è quella della prima figura.

① **Riconosco i coefficienti.**

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = -3$$

② **Calcolo il discriminante.**

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$$

③ **Applico la formula.** Poiché $\Delta > 0$, le soluzioni sono due.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3$$

④ **Trovo il vertice.**

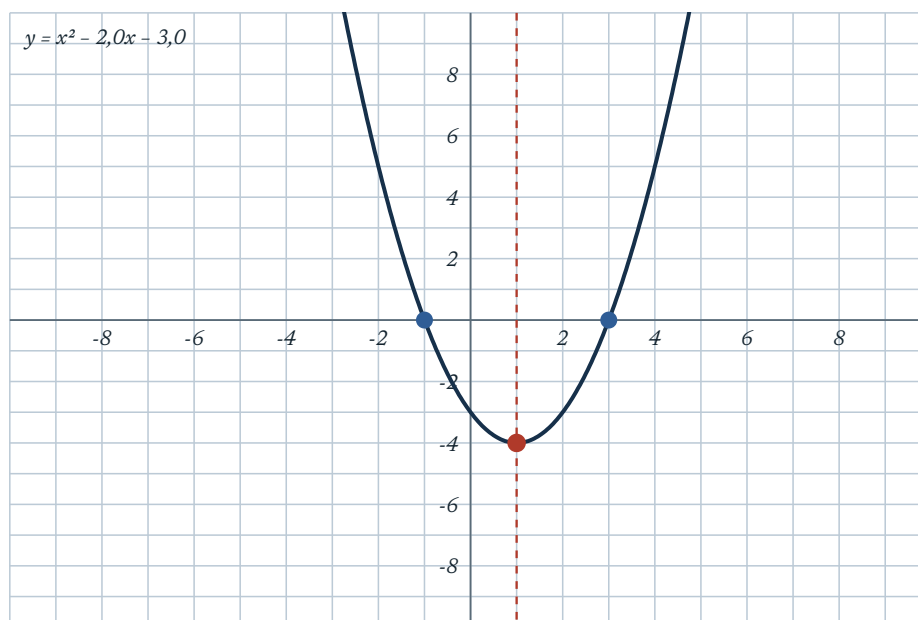
$$x_V = \frac{2}{2} = 1, \quad y_V = \frac{-16}{4} = -4$$

⑤ **Scrivo l'asse di simmetria** e verifico che passi a metà fra le due radici.

$$x = 1, \quad \frac{-1 + 3}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Tutto il caso svolto in un disegno solo

La figura raccoglie quello che i conti hanno prodotto fin qui per $y = x^2 - 2x - 3$: la parabola, i due punti in cui taglia l'asse x , il vertice e l'asse di simmetria. Sotto al grafico sono riportati il discriminante e i valori che si leggono sul disegno.



Δ è positivo: due soluzioni reali distinte, la parabola taglia l'asse x in due punti.

discriminante	soluzioni	vertice	asse di simmetria
$\Delta = 16,00$	$x_1 = -1,00, x_2 = 3,00$	$V(1,00; -4,00)$	$x = 1,00$

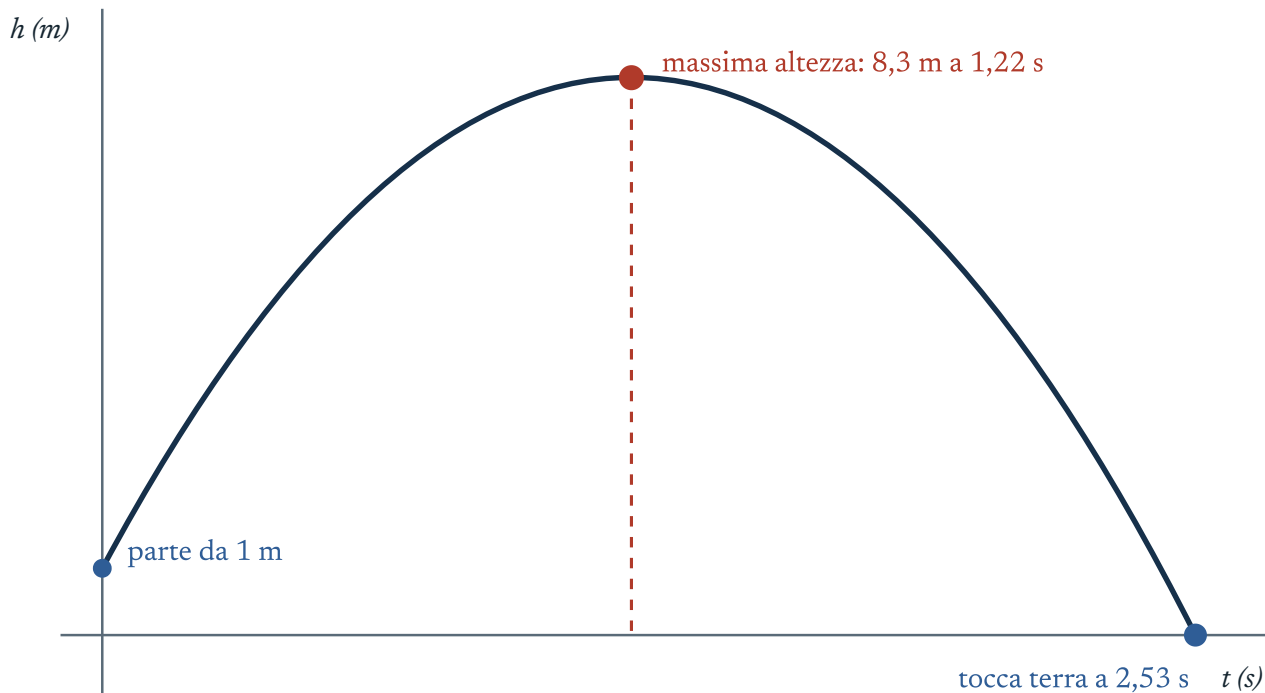
I tre casi si distinguono a colpo d'occhio dal numero di punti in cui la curva incontra l'asse x : due se $\Delta > 0$, uno solo se $\Delta = 0$, nessuno se $\Delta < 0$. Il segno di a decide invece da che parte è rivolta la concavità.

Dove serve davvero: un pallone in aria

Un pallone viene calciato verso l'alto da un'altezza di 1 m con velocità iniziale 12 m/s . Trascurando l'attrito dell'aria, l'altezza da terra dopo t secondi è descritta proprio da un'equazione di secondo grado:

$$h(t) = -4,9 t^2 + 12 t + 1$$

Qui la parabola non è la traiettoria vista di lato: è il grafico dell'*altezza in funzione del tempo*. Il coefficiente $a = -4,9$ vale $-g/2$ ed è negativo, quindi la concavità è verso il basso: c'è un punto più alto, ed è il vertice.



Altezza del pallone nel tempo: il vertice è l'istante di quota massima, la radice positiva è l'istante in cui tocca terra.

Quando torna a terra?

Si impone $h(t) = 0$ e si risolve l'equazione:

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 19,6}}{-9,8} \rightarrow t \approx -0,08; t \approx 2,53$$

Le soluzioni matematiche sono due, ma una è negativa: corrisponde a un istante prima del calcio, quindi **non ha senso fisico** e si scarta. Il pallone torna a terra dopo circa 2,53 s. È un passaggio importante: la matematica dà tutte le risposte possibili, il problema reale decide quali tenere.

Qual è l'altezza massima?

Basta il vertice, senza bisogno di provare valori a caso:

$$t_V = \frac{-12}{2 \cdot (-4,9)} \approx 1,22 \text{ s}, \quad h_V = h(1,22) \approx 8,3 \text{ m}$$

Lo stesso schema descrive molte altre situazioni: l'area massima di un recinto di perimetro dato, il ricavo massimo quando il prezzo fa calare le vendite, la forma di un arco o di un cavo teso sotto carico. Ogni volta che una grandezza dipende dal quadrato di un'altra, compare una parabola e il vertice è il valore ottimale.

Scorciatoie da tenere a mente

- bx mancante ($ax^2 + c = 0$): equazione *pura*. Si isola x^2 e si estrae la radice; le due soluzioni sono opposte e il vertice sta sull'asse y .
- c mancante ($ax^2 + bx = 0$): equazione *spuria*. Si raccoglie x ; una soluzione è sempre $x = 0$, quindi la parabola passa per l'origine.
- Se b è pari conviene la formula ridotta, con $b/2$ al posto di b : $x = \frac{-b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}$.
- Somma e prodotto delle soluzioni: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. Ottimo per controllare al volo un risultato.