

Monomi e polinomi

Le espressioni letterali si costruiscono come parole: prima le lettere e i numeri che stanno insieme, poi le somme. Definizioni, gradi e tutte le operazioni, con i conti svolti.

$$\underbrace{-3}_{\text{coefficiente}} \underbrace{a^2 b^1}_{\text{parte letterale}}$$

grado: $2 + 1 = 3$
si sommano gli esponenti

L'esponente 1 non si scrive mai,
ma va contato nel grado.

Ogni monomio è fatto da una parte numerica e da una parte con le lettere, unite da una moltiplicazione sottintesa.

Che cos'è un monomio

Un **monomio** è un'espressione letterale in cui compaiono soltanto moltiplicazioni e potenze con esponente naturale. Non ci sono addizioni, sottrazioni, né lettere al denominatore o sotto radice.

Sono monomi	Non sono monomi
$-3a^2b$	$2x + y$
$\frac{1}{2}x^3y$	$3/x$
7	$\sqrt{a}$

Un monomio è in **forma normale** quando è scritto come prodotto di un solo fattore numerico per le lettere, ciascuna presa una volta sola con il proprio esponente. Per esempio $2a \cdot 3ab$ non è in forma normale, mentre $6a^2b$ lo è.

Coefficiente e parte letterale

Il numero davanti si chiama **coefficiente**, l'insieme delle lettere con i loro esponenti è la **parte letterale**. Se il coefficiente è 1 o -1 non si scrive: a^2b significa $1 \cdot a^2b$.

Il grado

Il **grado complessivo** di un monomio è la somma degli esponenti di tutte le lettere; il **grado rispetto a una lettera** è l'esponente di quella lettera soltanto.

$-3a^2b$ grado complessivo 3, grado rispetto ad a 2, rispetto a b 1

5 monomio di grado zero: nessuna lettera

0 monomio nullo: non ha grado

Monomi simili

Due monomi sono **simili** quando hanno la *stessa identica parte letterale*, indipendentemente dal coefficiente. Sono **uguali** se coincidono anche i coefficienti, **opposti** se i coefficienti sono opposti.

$4x^2y$ e $-7x^2y$ simili

$4x^2y$ e $4xy^2$ non simili: gli esponenti sono scambiati

$4x^2y$ e $-4x^2y$ opposti

Questa definizione è la chiave di tutto il capitolo: due monomi si possono sommare solo se sono simili, mentre si possono sempre moltiplicare.

Operazioni con i monomi

Addizione e sottrazione

Solo fra monomi simili: si sommano i coefficienti e si lascia invariata la parte letterale.

$$5a^2b - 2a^2b = 3a^2b$$

Moltiplicazione

Sempre possibile: si moltiplicano i coefficienti e si sommano gli esponenti delle lettere uguali.

$$2a^2b \cdot (-3ab^3) = -6a^3b^4$$

Divisione

Si dividono i coefficienti e si sottraggono gli esponenti delle lettere uguali.

$$12a^4b^3 : 4a^2b = 3a^2b^2$$

Somma: attenzione ai non simili

Se i monomi non sono simili, la somma *resta indicata*: non si può fare altro, e il risultato è un polinomio.

$$7x^3 + 2x^3 - 4x^3 = 5x^3 \quad 7 + 2 - 4 = 5$$

$3ab + 5a$ non simili: il risultato è già la forma finale

Prodotto e potenza

Nel prodotto si applica la proprietà delle potenze di uguale base: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Nella potenza di un monomio, invece, l'esponente si distribuisce su *tutti* i fattori, coefficiente compreso.

$$(-2x^2y) \cdot (3xy^4) = (-2 \cdot 3) \cdot x^{2+1} \cdot y^{1+4} = -6x^3y^5$$

$$(-2x^2y)^3 = (-2)^3 \cdot x^6 \cdot y^3 = -8x^6y^3$$

Il grado del prodotto è la somma dei gradi dei fattori: nell'esempio $3 + 5 = 8$, e infatti $-6x^3y^5$ ha grado 8. È un buon controllo veloce.

Divisione

Il quoziente di due monomi è ancora un monomio solo se ogni esponente del divisore non supera quello corrispondente del dividendo; altrimenti si ottiene una frazione algebrica.

$$15a^5b^2 : (-5a^2b) = (15 : -5) \cdot a^{5-2} \cdot b^{2-1} = -3a^3b$$

$$4x^2 : 8x^3 = 1/2x \quad \text{non è un monomio}$$

Che cos'è un polinomio

Un **polinomio** è la somma algebrica di due o più monomi, detti **termini**. Un monomio da solo si considera il caso più semplice di polinomio.

Si dice **ridotto a forma normale** quando tutti i termini simili sono già stati sommati fra loro e non ce ne sono più di riducibili. In base al numero dei termini si parla di *binomio* (due), *trinomio* (tre), *quadrinomio* (quattro).

Grado di un polinomio

Il **grado complessivo** di un polinomio è il grado più alto fra quelli dei suoi termini. Si può parlare anche di grado rispetto a una singola lettera, con lo stesso criterio.

$$5x^3 - 2x^2y + xy - 7 \quad \text{gradi dei termini: } 3, 3, 2, 0 \rightarrow \text{grado complessivo } 3$$

Un polinomio in una sola lettera si dice **ordinato** quando i termini sono scritti secondo esponenti crescenti o decrescenti, e **completo** quando compaiono tutte le potenze dal grado massimo fino al termine noto.

$2x^3 + 5x^2 - x + 4$ ordinato e completo

$2x^3 - x + 4$ ordinato ma non completo: manca il termine in x^2

Ordinare un polinomio prima di operare non è una formalità: rende immediato il confronto fra termini simili ed è indispensabile per la divisione fra polinomi.

Operazioni con i polinomi

Somma e differenza

Si eliminano le parentesi e si sommano fra loro i termini simili. Se davanti alla parentesi c'è un segno meno, tutti i termini interni cambiano segno.

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 5x - 4) \\ &= 3x^2 - 2x + 1 + x^2 + 5x - 4 \quad \text{tolgo le parentesi} \\ &= 4x^2 + 3x - 3 \quad \text{sommo i simili} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (3x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 5x - 4) \\ &= 3x^2 - 2x + 1 - x^2 - 5x + 4 \quad \text{cambio tutti i segni del secondo} \\ &= 2x^2 - 7x + 5 \end{aligned}$$

Monomio per polinomio

Si applica la proprietà distributiva: il monomio moltiplica *ciascun* termine del polinomio.

$$a \cdot (b + c + d) = ab + ac + ad$$

$$\begin{aligned} & -2x(3x^2 - x + 5) \\ &= -2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot (-x) - 2x \cdot 5 \quad \text{distribuisco} \\ &= -6x^3 + 2x^2 - 10x \end{aligned}$$

Polinomio per polinomio

Ogni termine del primo va moltiplicato per ogni termine del secondo; alla fine si sommano i termini simili. Se i due polinomi hanno rispettivamente h e k termini, i prodotti da scrivere sono $h \cdot k$.

$$\begin{aligned}
 &(x + 3)(2x^2 - x + 4) \\
 &= 2x^3 - x^2 + 4x \quad \times \text{ per ogni termine} \\
 &\quad + 6x^2 - 3x + 12 \quad \times \text{ per ogni termine} \\
 &= \mathbf{2x^3 + 5x^2 + x + 12} \quad \text{sommo i simili}
 \end{aligned}$$

Il grado del prodotto è la somma dei gradi: qui $1 + 2 = 3$. Se il risultato ha grado diverso, c'è sicuramente un errore.

Divisione di un polinomio per un monomio

Si divide ogni termine del polinomio per il monomio, sempre per la proprietà distributiva.

$$\begin{aligned}
 &(8a^3b - 12a^2b^2 + 4a^2b) : (4a^2b) \\
 &= 8a^3b : 4a^2b - 12a^2b^2 : 4a^2b + 4a^2b : 4a^2b \\
 &= \mathbf{2a - 3b + 1}
 \end{aligned}$$

L'ultimo termine dà 1, non 0: un monomio diviso per sé stesso vale uno. È l'errore più frequente in questo tipo di esercizio.

Tre prodotti da riconoscere a colpo d'occhio

Alcuni prodotti fra polinomi ricorrono così spesso che conviene saperne il risultato a memoria, invece di rifare ogni volta tutti i passaggi.

Nome	Formula	Esempio
Quadrato di binomio	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$
Somma per differenza	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	$(x + 5)(x - 5) = x^2 - 25$
Cubo di binomio	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Nel quadrato di binomio il doppio prodotto è la parte che si dimentica più spesso: $(a + b)^2$ non è $a^2 + b^2$. Basta provare con dei numeri per convincersene: $(2 + 3)^2 = 25$, mentre $4 + 9 = 13$.

Errori da evitare

- Sommare monomi non simili: $3a + 2b = 5ab$ è sbagliato, la somma resta $3a + 2b$.
- Sommare gli esponenti nell'addizione: $x^2 + x^2 = x^4$ è sbagliato, si sommano i coefficienti, $2x^2$.
- Dimenticare il segno meno davanti a una parentesi: va cambiato il segno di *tutti* i termini interni, non solo del primo.
- Nella potenza di un monomio, lasciare fuori il coefficiente: $(3x)^2 = 3x^2$ è sbagliato, si scrive $9x^2$.

Da tenere a mente

- Si sommano solo i monomi **simili**, cioè con la stessa parte letterale; si moltiplicano invece sempre.
- Nel prodotto gli esponenti si **sommano**, nella divisione si **sottraggono**, nella potenza si **moltiplicano**.
- Grado di un monomio: somma degli esponenti. Grado di un polinomio: il maggiore fra i gradi dei suoi termini.
- Il grado di un prodotto è la somma dei gradi dei fattori: usalo come controllo finale.
- Un esponente che non si vede vale 1; una lettera che non si vede ha esponente 0.
- Per verificare un risultato, si può sostituire un numero qualsiasi alle lettere nell'espressione di partenza e in quella finale: devono dare lo stesso valore.