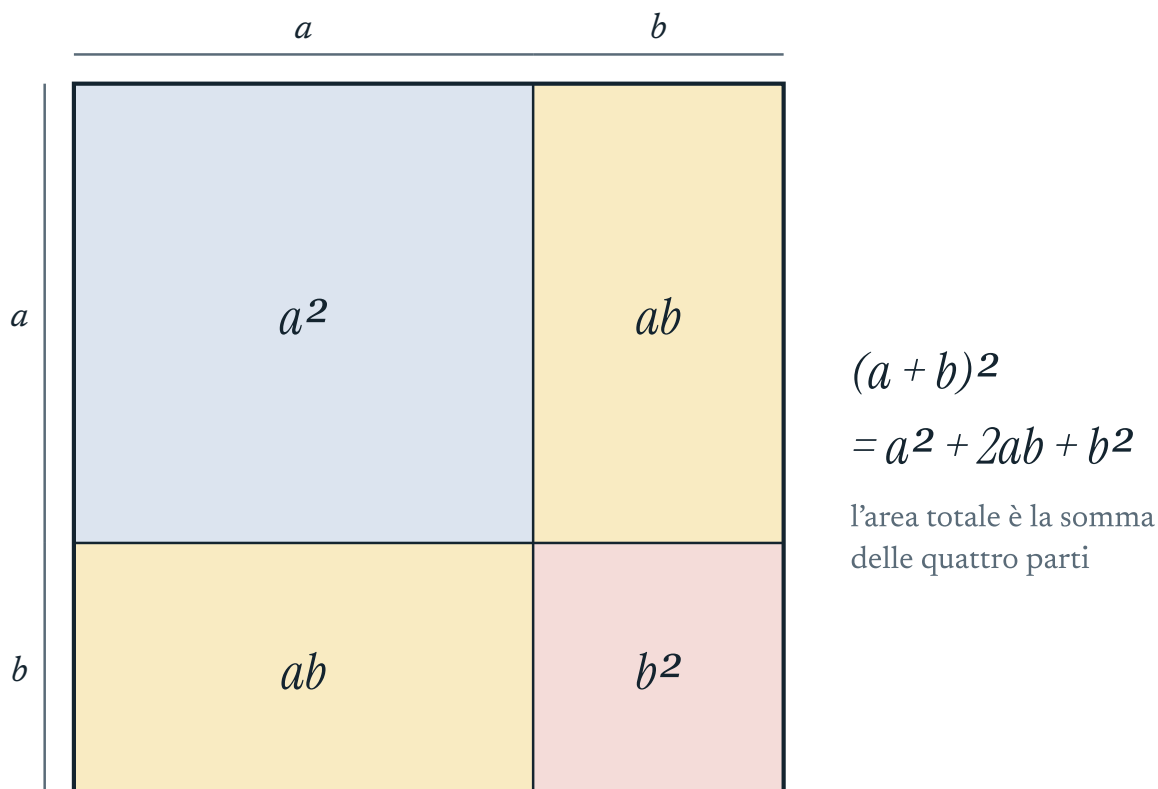


# I prodotti notevoli

Alcune moltiplicazioni fra polinomi capitano così spesso che conviene conoscerne il risultato a memoria. Ma prima di impararle, vale la pena vedere da dove vengono: quasi tutte si possono disegnare.



Il quadrato di lato  $a+b$  si scompone in un quadrato  $a^2$ , due rettangoli uguali  $ab$  e un quadrato  $b^2$ .

## Che cosa sono

Un **prodotto notevole** è una moltiplicazione fra polinomi il cui risultato segue uno schema fisso, sempre lo stesso. Nulla vieta di svolgere i conti ogni volta con la proprietà distributiva: la formula serve solo ad arrivare al risultato più in fretta e con meno errori.

Si leggono anche al contrario. Letta da sinistra a destra, una formula serve a *sviluppare* un prodotto; letta da destra a sinistra, serve a *scomporre* un polinomio in fattori. È per questo che vanno conosciute bene in entrambi i versi.

## Il quadrato di binomio

### La formula

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Il quadrato del primo, più il doppio prodotto dei due, più il quadrato del secondo.

Non è una regola da accettare per fede: basta svolgere la moltiplicazione.

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a^2 + ab + ba + b^2 \text{ ogni termine per ogni termine} \\ &= \mathbf{a^2 + 2ab + b^2} \text{ ab e ba sono simili}\end{aligned}$$

Se il secondo termine è negativo cambia solo il segno del doppio prodotto, perché i due quadrati restano comunque positivi:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned}(2x + 3)^2 &= 4x^2 + 12x + 9 \text{ doppio prodotto: } 2 \cdot 2x \cdot 3 \\ (x - 5)^2 &= x^2 - 10x + 25 \\ (3a - 2b)^2 &= 9a^2 - 12ab + 4b^2\end{aligned}$$

Il termine centrale è quello che si dimentica:  $(a + b)^2$  non è  $a^2 + b^2$ . Una prova numerica chiude la questione in cinque secondi:  $(2 + 3)^2 = 25$ , mentre  $4 + 9 = 13$ .

## Somma per differenza

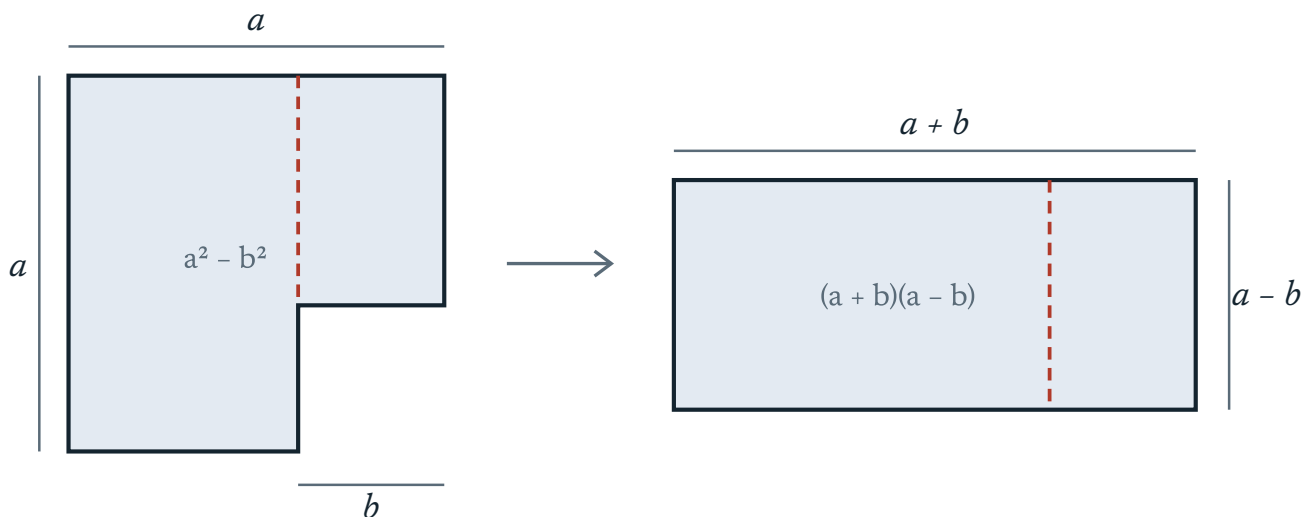
### La formula

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Il prodotto della somma di due termini per la loro differenza è la differenza dei quadrati.

Anche qui il conto è breve: i due prodotti misti si elidono a vicenda.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= \mathbf{a^2 - b^2} \quad -ab \text{ e } +ab \text{ si annullano}$$



Tagliando il pezzo tratteggiato e spostandolo sotto, la figura diventa un rettangolo: stessa area, forma diversa.

$$(x + 7)(x - 7) = x^2 - 49$$

$$(3a + 2b)(3a - 2b) = 9a^2 - 4b^2$$

$$(5 - y)(5 + y) = 25 - y^2 \quad \text{l'ordine dei fattori non conta}$$

Questa formula è anche la più comoda per il **calcolo mentale**, perché trasforma una moltiplicazione difficile in una differenza facile:

$$98 \cdot 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 10000 - 4 = \mathbf{9996}$$

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 10000 + 200 + 1 = \mathbf{10201}$$

## Il quadrato di un trinomio

### La formula

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

La somma dei quadrati di tutti i termini, più il doppio prodotto di ogni coppia possibile.

Lo schema si estende a quante parole si vuole: i quadrati sono tanti quanti i termini, i doppi prodotti sono tanti quante le coppie. Con tre termini le coppie sono tre, con quattro termini diventano sei.

$$\begin{aligned}(x + 2y - 1)^2 \\&= x^2 + 4y^2 + 1 \text{ i tre quadrati} \\&\quad + 4xy - 2x - 4y \text{ i doppi prodotti, segni compresi} \\&= x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y\end{aligned}$$

I segni vanno tenuti attaccati ai termini: in questo esempio il terzo termine è  $-1$ , quindi il doppio prodotto con  $x$  vale  $-2x$ .

## Il cubo di binomio

### La formula

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Quattro termini: gli esponenti di  $a$  scendono da 3 a 0 mentre quelli di  $b$  salgono da 0 a 3, con i coefficienti 1, 3, 3, 1.

Con il secondo termine negativo i segni si alternano, perché ogni potenza dispari di  $-b$  resta negativa:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 4 + 8 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(2a - 1)^3 = 8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$$

### I coefficienti: il triangolo di Tartaglia

I numeri 1, 3, 3, 1 non sono casuali. Ogni riga del triangolo di Tartaglia dà i coefficienti della potenza corrispondente del binomio, e ogni numero si ottiene sommando i due che gli stanno sopra.

| <i>potenza</i> | <i>coefficienti</i> |
|----------------|---------------------|
| $(a + b)^0$    | 1                   |
| $(a + b)^1$    | 1 1                 |
| $(a + b)^2$    | 1 2 1               |
| $(a + b)^3$    | 1 3 3 1             |
| $(a + b)^4$    | 1 4 6 4 1           |
| $(a + b)^5$    | 1 5 10 10 5 1       |

Così non serve memorizzare nulla oltre la regola di costruzione: per  $(a + b)^4$  si scrivono le potenze decrescenti di  $a$ , quelle crescenti di  $b$  e davanti i numeri 1, 4, 6, 4, 1.

### Somma e differenza di cubi

Questi due si incontrano soprattutto al contrario, quando serve scomporre. Vale la pena verificarli svolgendo il prodotto: tutti i termini intermedi si cancellano.

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$27a^3 - 1 = (3a - 1)(9a^2 + 3a + 1)$$

Nel secondo fattore il segno centrale è sempre l'opposto di quello del primo fattore, e il doppio prodotto non è doppio: è  $ab$ , non  $2ab$ . Sono i due dettagli che distinguono questa formula dal quadrato di binomio.

## Tutto in una tabella

| Prodotto                  | Sviluppo                            |
|---------------------------|-------------------------------------|
| $(a + b)^2$               | $a^2 + 2ab + b^2$                   |
| $(a - b)^2$               | $a^2 - 2ab + b^2$                   |
| $(a + b)(a - b)$          | $a^2 - b^2$                         |
| $(a + b + c)^2$           | $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ |
| $(a + b)^3$               | $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$         |
| $(a - b)^3$               | $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$         |
| $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ | $a^3 + b^3$                         |
| $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ | $a^3 - b^3$                         |
|                           |                                     |

## Errori da evitare

- Distribuire l'esponente su una somma:  $(a + b)^2 = a^2 + b^2$  è sbagliato, manca il doppio prodotto,  $a^2 + 2ab + b^2$ .
- Dimenticare il quadrato del coefficiente:  $(3x + 1)^2 = 3x^2 + 6x + 1$  è sbagliato, si scrive  $9x^2 + 6x + 1$ .
- Sbagliare il segno nel quadrato della differenza: il quadrato del secondo termine è sempre positivo,  $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16$ .
- Confondere  $a^2 - b^2$  con  $(a - b)^2$ : la differenza di quadrati si scompone in  $(a + b)(a - b)$ , non in un quadrato.
- Cercare di scomporre  $a^2 + b^2$ : la somma di due quadrati non è un prodotto notevole e non si scompone.

### Da tenere a mente

- Ogni prodotto notevole è solo una moltiplicazione già svolta: nel dubbio, rifalla con la proprietà distributiva.
- Nel quadrato di binomio il termine centrale è il **doppio** prodotto; nella scomposizione dei cubi il prodotto è **singolo**.
- Le formule si usano nei due sensi: da sinistra per sviluppare, da destra per scomporre.
- Il grado del risultato si controlla a occhio: il quadrato di un binomio di primo grado ha grado 2, il cubo grado 3.
- Per verificare uno sviluppo, sostituisci un numero comodo (per esempio  $a = 2$ ,  $b = 1$ ) nella scrittura di partenza e in quella finale: devono dare lo stesso valore.
- Somma per differenza è anche una scorciatoia di calcolo:  $97 \cdot 103 = 100^2 - 3^2$ .