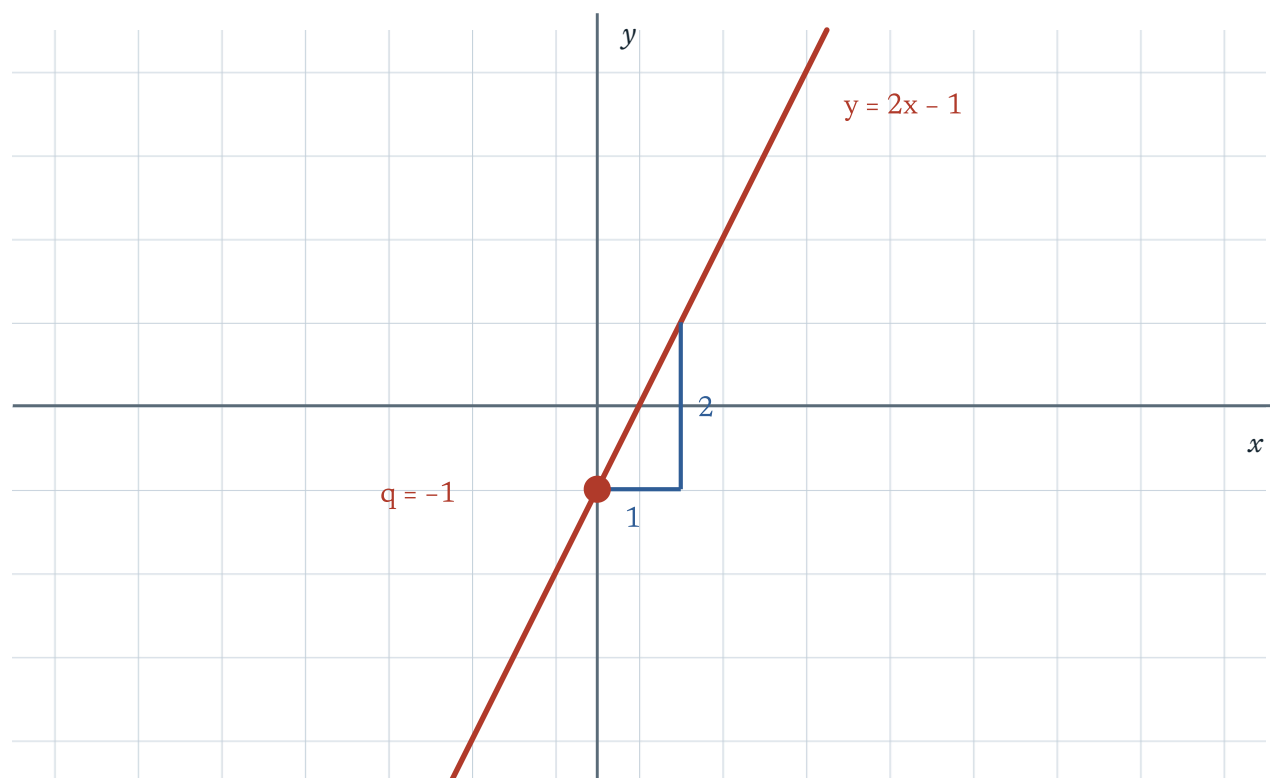


Equazioni di primo grado e rette

Un'equazione di primo grado ha una sola soluzione; la funzione corrispondente ha per grafico una retta. Coefficiente angolare, retta per due punti, perpendicolarità e intersezioni.



Dal punto di partenza sull'asse y , ogni passo verso destra fa salire la retta di m unità.

Equazioni di primo grado

Un'equazione è di primo grado quando l'incognita compare solo alla prima potenza. Dopo aver svolto i calcoli si arriva sempre alla **forma normale**:

$$ax + b = 0$$

Se $a \neq 0$ la soluzione è unica e si ottiene isolando l'incognita:

$$x = \frac{-b}{a}$$

Per esempio, da $3x - 6 = 0$ si ricava $x = 2$. Geometricamente questo numero è l'ascissa del punto in cui la retta $y = 3x - 6$ incontra l'asse x : risolvere l'equazione significa chiedersi dove la funzione vale zero.

I due casi limite: se $a = 0$ e $b \neq 0$ l'equazione è *impossibile* (nessuna soluzione); se $a = 0$ e $b = 0$ è *indeterminata* e ogni numero la soddisfa.

L'equazione della retta

Alla funzione di primo grado corrisponde una retta, che si scrive in **forma esplicita**:

$$y = mx + q$$

I due numeri hanno un significato preciso e leggibile sul disegno.

Il coefficiente angolare m misura la pendenza: indica di quanto sale (o scende) la retta ogni volta che ci si sposta di una unità verso destra. Se $m > 0$ la retta è crescente, se $m < 0$ è decrescente, se $m = 0$ è orizzontale.

Il termine noto q è l'*ordinata all'origine*: è il valore di y quando $x = 0$, cioè la quota a cui la retta taglia l'asse verticale.

Le rette verticali fanno eccezione: non si possono scrivere come $y = mx + q$, perché a una stessa x corrispondono infinite y . La loro equazione è del tipo $x = k$.

Disegnare una retta

Per una retta bastano due punti, quindi si possono seguire due strade.

- 1 **Con una tabella di valori.** Si scelgono due valori comodi di x , si calcolano le y corrispondenti, si segnano i due punti e si traccia la retta che li unisce.
- 2 **Partendo da q .** Si segna il punto $(0; q)$ sull'asse verticale, poi ci si sposta di una unità a destra e di m unità in verticale (in su se m è positivo, in giù se negativo). Si ottiene il secondo punto.

Per la retta $y = 2x - 1$ della prima figura:

x	0	1	3
$y = 2x - 1$	-1	1	5

Convieni calcolare un terzo punto e verificare che sia allineato con gli altri due: è il modo più rapido per accorgersi di un errore di conto.

La retta per due punti

Dati due punti distinti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$, passa per essi una sola retta. Il suo coefficiente angolare è il rapporto fra la salita e lo spostamento orizzontale:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Trovato m , il termine noto si ricava imponendo il passaggio per uno dei due punti: $q = y_A - m x_A$.

Esempio

Con $A(-1; 1)$ e $B(2; 7)$:

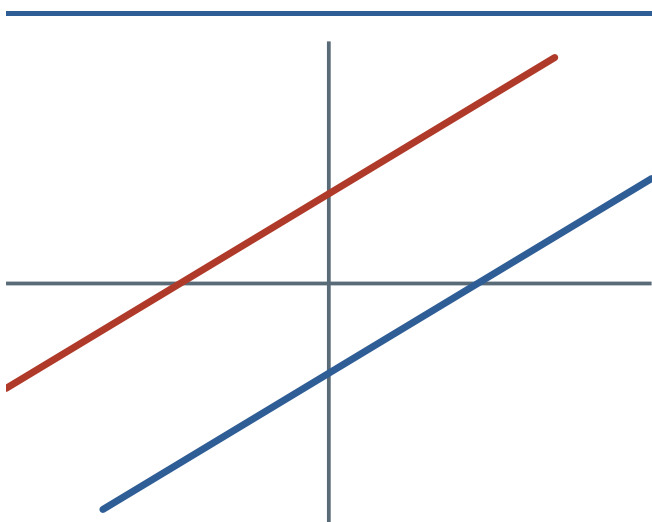
$$m = \frac{7 - 1}{2 - (-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$q = 1 - 2 \cdot (-1) = 3 \rightarrow y = 2x + 3$$

Se $x_A = x_B$ il denominatore si annulla: i due punti sono uno sopra l'altro e la retta è verticale, di equazione $x = x_A$.

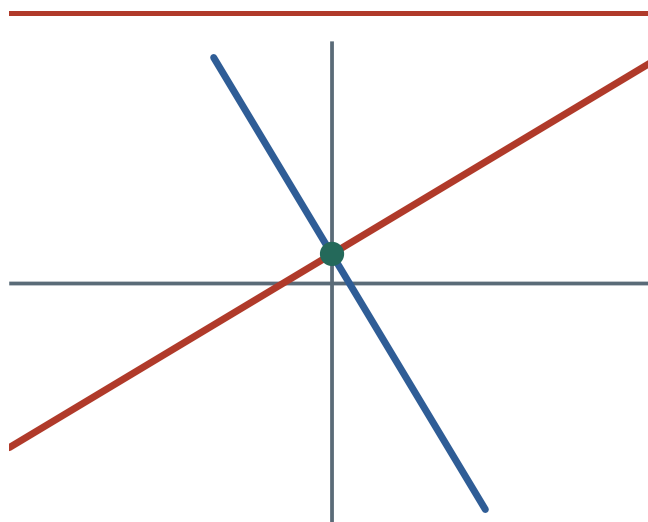
Parallele e perpendicolari

Due rette non verticali hanno la stessa direzione quando hanno lo stesso coefficiente angolare. Sono invece perpendicolari quando i loro coefficienti angolari sono *antireciproci*: uno è l'inverso dell'altro cambiato di segno.



$$m_1 = m_2$$

Rette parallele: stessa pendenza, q diverso. Non si incontrano mai.



$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Rette perpendicolari: si incontrano formando quattro angoli retti.

La condizione di perpendicolarità si usa spesso in questa forma, per costruire la perpendicolare a una retta data:

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Per esempio, la perpendicolare a $y = 2x + 3$ ha coefficiente angolare $-1/2$: dove la prima sale di due, la seconda scende di mezza unità.

Caso particolare: una retta orizzontale ($m = 0$) e una verticale ($x = k$) sono perpendicolari, ma la formula non si applica perché la verticale non ha coefficiente angolare.

Intersezione fra due rette

Il punto comune a due rette ha coordinate che soddisfano *entrambe* le equazioni. Trovarlo significa quindi risolvere un sistema:

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

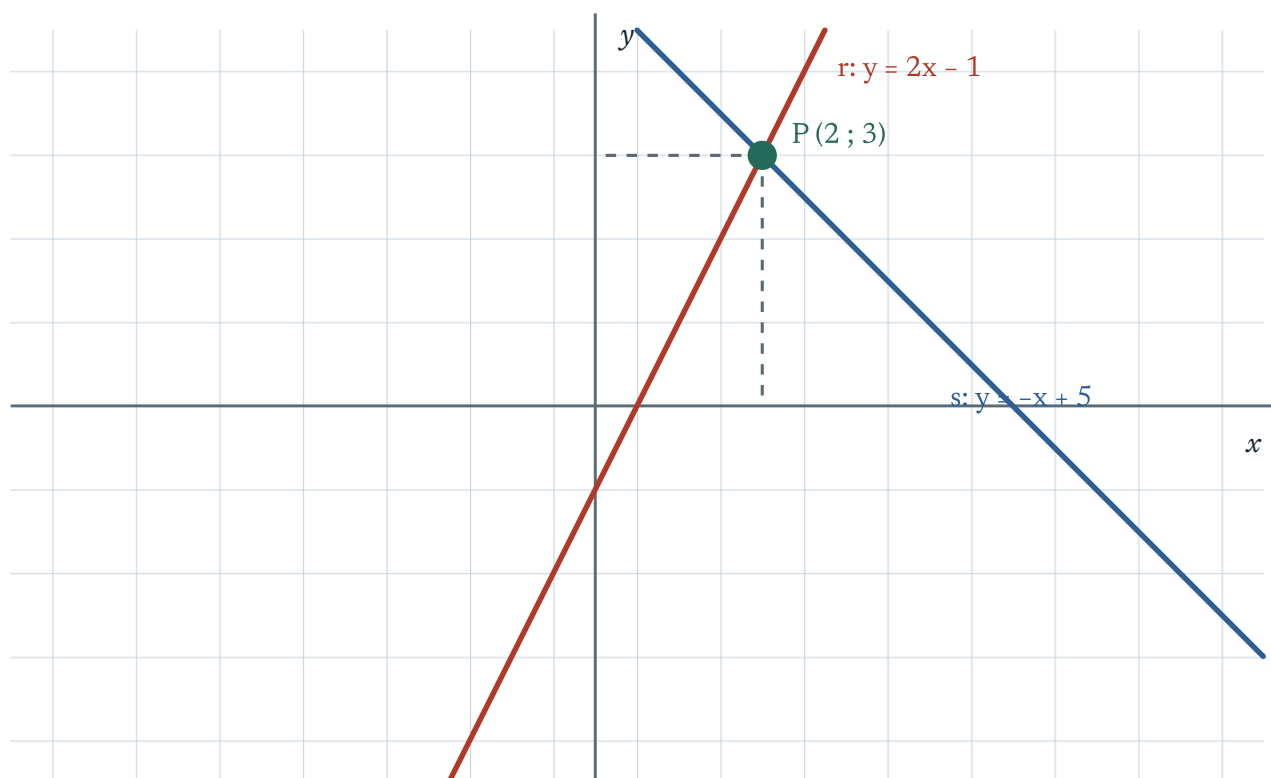
Con il metodo del confronto si uguagliano i due secondi membri, si ottiene un'equazione di primo grado in x e si sostituisce il risultato in una delle due equazioni per ricavare y .

Esempio

Cerchiamo il punto comune a $r: y = 2x - 1$ e $s: y = -x + 5$.

$$2x - 1 = -x + 5 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

$$y = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \rightarrow P(2; 3)$$

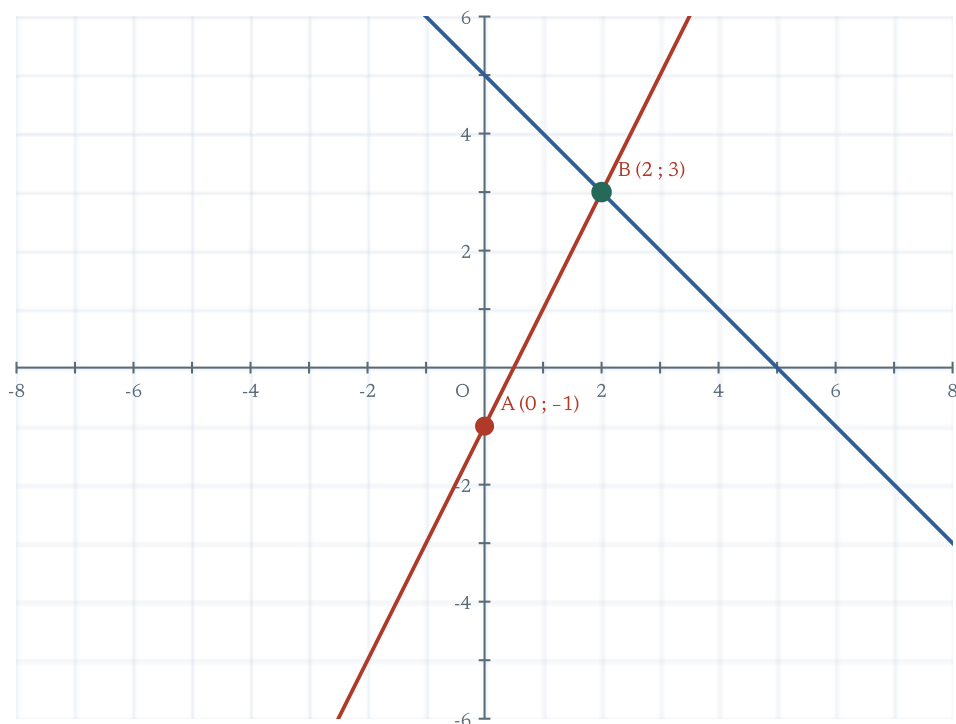


La soluzione del sistema è il punto in cui i due grafici si incrociano.

Il sistema può anche non avere soluzione unica, e il disegno lo spiega subito: se le rette sono **parallele distinte** non c'è nessun punto in comune e il sistema è impossibile; se sono **coincidenti** i punti comuni sono infiniti e il sistema è indeterminato.

Due rette incidenti, lette sul disegno

La figura mostra la retta r costruita per $A(0; -1)$ e $B(2; 3)$, insieme alla retta s . Sotto al piano si leggono le due equazioni in forma esplicita, la loro posizione reciproca e il punto in cui si incontrano.



Le rette r e s sono incidenti.

retta r (per A e B)	retta s	posizione reciproca	intersezione
$y = 2x - 1$	$y = -x + 5$	incidenti	$P(2; 3)$

Il punto di intersezione è la soluzione del sistema formato dalle due equazioni: si individua sul disegno e si controlla sostituendo le sue coordinate in entrambe. Qui cade proprio su B , che era già servito per costruire r .

Da tenere a mente

- Un'equazione di primo grado con $a \neq 0$ ha **una sola soluzione**: $x = -b/a$.
- $y = mx + q$: m è la pendenza, q il punto di partenza sull'asse y .
- Coefficiente angolare per due punti: $m = (y_B - y_A) / (x_B - x_A)$.
- Parallele: $m_1 = m_2$. Perpendicolari: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- Per verificare se un punto appartiene a una retta, si sostituiscono le sue coordinate nell'equazione: se l'uguaglianza è vera, il punto ci sta.
- Le rette verticali $x = k$ non hanno coefficiente angolare e non si scrivono nella forma esplicita.