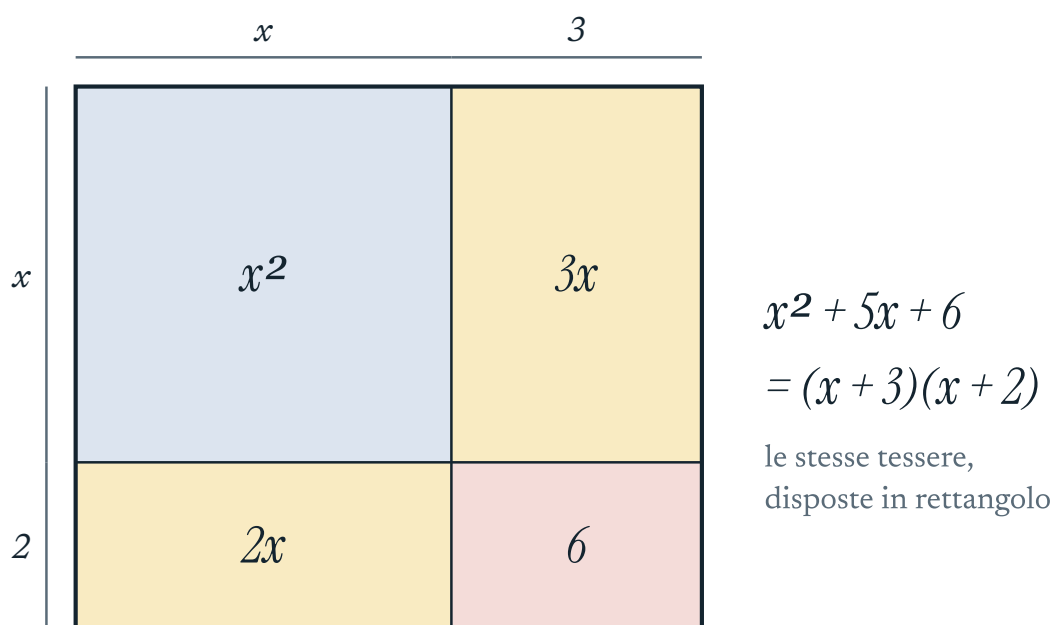


La scomposizione in fattori

Scomporre significa riscrivere una somma come un prodotto. È l'operazione inversa dei prodotti notevoli, e serve ogni volta che bisogna semplificare una frazione algebrica o risolvere un'equazione.



Un polinomio si scompone quando le sue parti si possono riorganizzare in un rettangolo: i due lati sono i fattori cercati.

Che cosa vuol dire scomporre

Scomporre in fattori un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi di grado più basso. Si parte da una somma e si arriva a una moltiplicazione, senza cambiare il valore dell'espressione.

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$$

Non tutti i polinomi si possono scomporre: quelli che non si riescono a spezzare in fattori di grado minore si dicono **irriducibili**, esattamente come i numeri primi fra gli interi. Per esempio $x^2 + 1$ è irriducibile.

La verifica è sempre a portata di mano: basta rifare la moltiplicazione. Se il prodotto dei fattori non restituisce il polinomio di partenza, la scomposizione è sbagliata.

A che cosa serve

Non è un esercizio fine a sé stesso. Un prodotto si può semplificare (nelle frazioni algebriche si eliminano i fattori comuni) e soprattutto si può annullare: se un prodotto vale zero, almeno uno dei fattori è zero. È il modo più diretto per risolvere molte equazioni.

$$x^2 + 5x + 6 = 0$$

$$(x + 3)(x + 2) = 0 \text{ scompongo}$$

$$x + 3 = 0 \text{ oppure } x + 2 = 0 \text{ legge di annullamento del prodotto}$$

$$x = -3 \text{ oppure } x = -2$$

Da dove cominciare

Davanti a un polinomio conviene seguire sempre lo stesso ordine di controlli, invece di andare a tentativi.

- 1 **Cerca un fattore comune a tutti i termini** e mettilo in evidenza. È il primo passo in assoluto e semplifica tutto il resto.
- 2 **Conta i termini rimasti** dentro la parentesi: il numero dei termini suggerisce quale schema provare.
- 3 **Riconosci il prodotto notevole** corrispondente, oppure prova il raccoglimento parziale o la regola somma-prodotto.
- 4 **Ricontrolla ogni fattore** ottenuto: spesso uno dei due si può scomporre ancora. Si finisce solo quando tutti i fattori sono irriducibili.

Termini	Che cosa provare	Esempio
2	differenza di quadrati; somma o differenza di cubi	$x^2 - 9$; $a^3 + 8$
3	quadrato di binomio; regola somma-prodotto; formula con il discriminante	$x^2 + 6x + 9$; $x^2 - x - 6$
4	raccoglimento parziale; cubo di binomio	$ax + ay + bx + by$
6	quadrato di trinomio	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Raccoglimento a fattore comune

La regola

$$ab + ac = a(b + c)$$

Si mette in evidenza il massimo fattore comune: il MCD dei coefficienti e ogni lettera presente in *tutti* i termini, presa con l'esponente più piccolo.

$$\begin{aligned} 6x^3y - 9x^2y^2 + 3x^2y \\ = 3x^2y(2x - 3y + 1) \quad \text{MCD dei numeri: 3 ; lettere comuni: } x^2, y \end{aligned}$$

Quando un termine coincide con il fattore raccolto, nella parentesi resta 1, non 0. È l'errore più frequente di tutto il capitolo: $3x^2y : 3x^2y = 1$.

A volte il fattore comune è un'intera parentesi:

$$2a(x - 1) + 5b(x - 1) = (x - 1)(2a + 5b)$$

Raccoglimento parziale

Con quattro termini (o comunque un numero pari) si può provare a raggrupparli a due a due, raccogliere dentro ciascun gruppo e sperare che compaia una parentesi uguale, da mettere a sua volta in evidenza.

$$\begin{aligned} ax + ay + bx + by \\ = a(x + y) + b(x + y) \quad \text{raccolgo in ogni coppia} \\ = (x + y)(a + b) \quad \text{raccolgo la parentesi comune} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x^3 - 6x^2 - 2x + 4 \\ = 3x^2(x - 2) - 2(x - 2) \quad \text{nel secondo gruppo raccolgo } -2, \text{ non } +2 \\ = (x - 2)(3x^2 - 2) \end{aligned}$$

Se dopo il primo raccoglimento le due parentesi non coincidono, conviene cambiare l'abbinamento dei termini prima di concludere che il metodo non funziona.

Riconoscere i prodotti notevoli

Qui le formule dei prodotti notevoli si leggono da destra verso sinistra. È la parte in cui serve più occhio che calcolo: bisogna accorgersi della forma.

Differenza di due quadrati

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$x^2 - 49 = (x + 7)(x - 7)$$

$$9a^2 - 4b^2 = (3a + 2b)(3a - 2b)$$

$$x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) = (x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \text{ si scompone due volte}$$

La *somma* di due quadrati, invece, è irriducibile: $x^2 + 4$ non si scompone.

Trinomio quadrato perfetto

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Si riconosce così: due termini sono quadrati (e positivi), il terzo è il doppio prodotto delle loro basi. Il segno del doppio prodotto diventa il segno dentro la parentesi.

$$x^2 + 10x + 25 \text{ basi: } x \text{ e } 5 ; \text{ doppio prodotto } 2 \cdot x \cdot 5 = 10x \checkmark$$

$$= (x + 5)^2$$

$$4a^2 - 12ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$$

Cubo di binomio

$$a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x + 2)^3 \text{ basi } x \text{ e } 2 ; 3 \cdot x^2 \cdot 2 = 6x^2 \checkmark ; 3 \cdot x \cdot 4 = 12x \checkmark$$

Somma e differenza di cubi

$$a^3 \pm b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

$$8a^3 - 1 = (2a - 1)(4a^2 + 2a + 1)$$

Nel secondo fattore il termine centrale è ab , non $2ab$, e ha segno opposto a quello del primo fattore.

Il trinomio di secondo grado

Quando il trinomio non è un quadrato perfetto resta la via della **somma e prodotto**. Se il coefficiente di x^2 è 1, si cercano due numeri la cui somma sia il coefficiente centrale e il cui prodotto sia il termine noto.

La regola

$$x^2 + sx + p = (x + m)(x + n) \quad \text{con } m + n = s, \quad m \cdot n = p$$

Conviene partire dal prodotto: le coppie di divisori del termine noto sono poche, e fra quelle si cerca la coppia che dà la somma giusta.

$x^2 - x - 6$ cerco due numeri con prodotto -6 e somma -1

$$-3 \text{ e } 2 \quad (-3) \cdot 2 = -6 \checkmark ; -3 + 2 = -1 \checkmark$$

$$= (x - 3)(x + 2)$$

Se i numeri interi non esistono, o se il coefficiente di x^2 è diverso da 1, si passa dalle soluzioni dell'equazione associata:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$2x^2 - 5x + 2 \quad \Delta = 25 - 16 = 9 ; x = (5 \pm 3)/4$$

$$x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$$

$$= 2(x - 2)(x - \frac{1}{2}) = (x - 2)(2x - 1)$$

Se $\Delta < 0$ il trinomio è irriducibile: non esistono soluzioni reali, quindi non esistono fattori di primo grado.

Un esercizio completo

Le scomposizioni vere quasi mai si risolvono in un colpo solo: si applicano più metodi in sequenza, fermandosi quando ogni fattore è irriducibile.

$$2x^4 - 32$$

$$= 2(x^4 - 16) \quad 1. \text{ fattore comune}$$

$$= 2(x^2 + 4)(x^2 - 4) \quad 2. \text{ differenza di quadrati}$$

$$= 2(x^2 + 4)(x + 2)(x - 2) \quad 3. \text{ ancora differenza di quadrati}$$

$$3a^3 + 12a^2 + 12a$$

$$= 3a(a^2 + 4a + 4) \quad 1. \text{ fattore comune } 3a$$

$$= 3a(a + 2)^2 \quad 2. \text{ quadrato perfetto}$$

Errori da evitare

- Lasciare il risultato come somma: se alla fine non c'è un prodotto, il polinomio non è scomposto.
- Scrivere zero al posto di uno nel raccoglimento: $5x^2 + 5x = 5x(x + 0)$ è sbagliato, si scrive $5x(x + 1)$.
- Tentare di scomporre una somma di quadrati: $x^2 + 9 = (x + 3)^2$ è falso, e $x^2 + 9$ è irriducibile.
- Fermarsi troppo presto: $x^4 - 16 = (x^2 + 4)(x^2 - 4)$ è corretto ma incompleto, il secondo fattore si scompone ancora.
- Raccogliere un fattore che non c'è in tutti i termini: deve comparire in *ciascuno*, altrimenti non è comune.

Da tenere a mente

- Primo controllo sempre uguale: **c'è un fattore comune?** Poi si conta il numero dei termini.
- Scomporre è l'inverso di moltiplicare: per verificare, rifai il prodotto.
- Differenza di quadrati sì, somma di quadrati no.
- Un trinomio è quadrato perfetto solo se il termine centrale è il **doppio** prodotto delle basi; altrimenti si prova con somma e prodotto.
- Si continua finché ogni fattore è irriducibile: spesso serve più di un passaggio.
- Una scomposizione ben fatta rende immediato risolvere l'equazione associata, grazie alla legge di annullamento del prodotto.