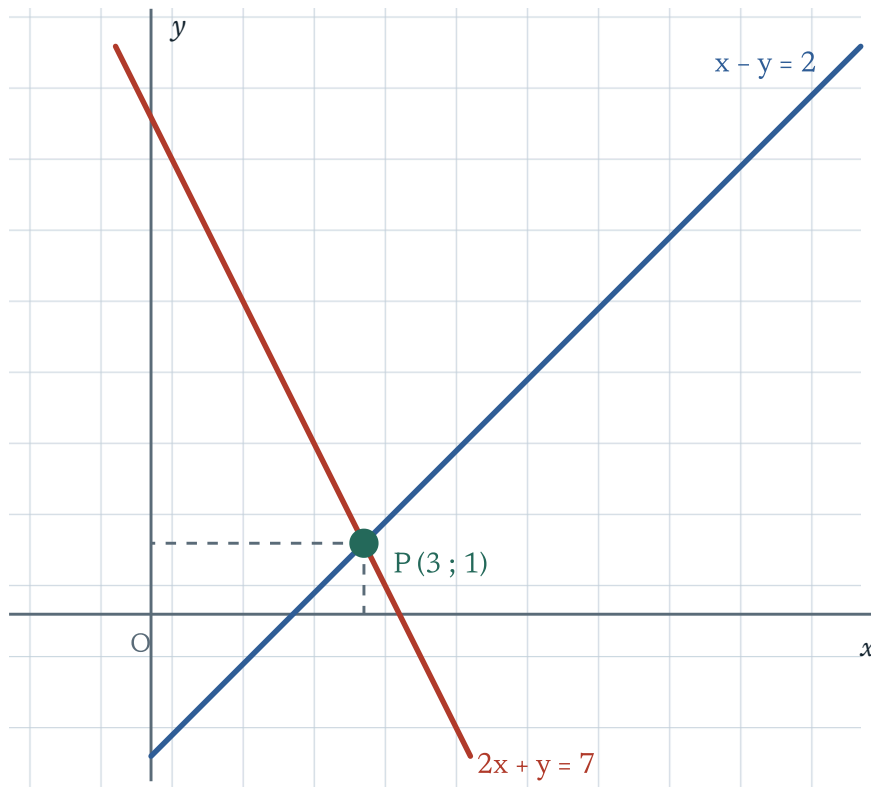


Sistemi di equazioni

Due equazioni, due incognite, una sola coppia di numeri che le soddisfa entrambe. Quattro metodi per trovarla, e un disegno che spiega perché a volte non esiste.



$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Ogni equazione è una retta; la soluzione del sistema è il punto in comune, cioè l'unica coppia $(x; y)$ che va bene per entrambe.

Che cos'è un sistema

Un **sistema di equazioni** è un insieme di equazioni nelle stesse incognite, da soddisfare *contemporaneamente*. Risolverlo significa trovare tutte le coppie di valori che rendono vere tutte le equazioni insieme.

Un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite si dice **lineare** e si scrive in **forma normale** così:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

La soluzione non è un numero ma una *coppia ordinata*. Per il sistema della figura la soluzione è $(3; 1)$, e si verifica sostituendo in entrambe le equazioni:

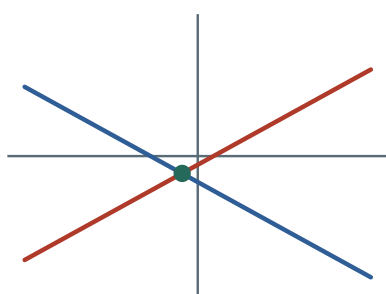
$$2 \cdot 3 + 1 = 7 \checkmark$$

$$3 - 1 = 2 \checkmark$$

La verifica va fatta sempre in tutte e due le equazioni: una coppia che soddisfa solo la prima non è una soluzione del sistema.

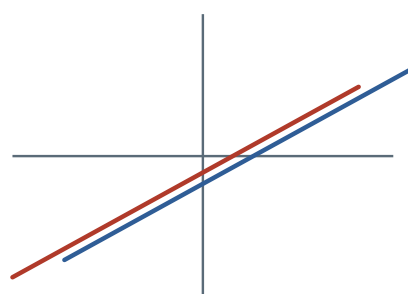
Quante soluzioni: la lettura grafica

Ogni equazione lineare rappresenta una retta. Le posizioni possibili di due rette nel piano sono soltanto tre, e a ciascuna corrisponde un tipo di sistema.



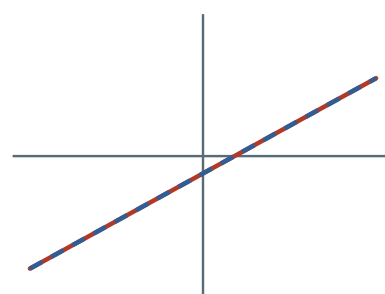
determinato

Rette incidenti: una sola soluzione, il punto di intersezione.



impossibile

Rette parallele distinte: nessun punto in comune, nessuna soluzione.



indeterminato

Rette coincidenti: infinite soluzioni, tutti i punti della retta.

La distinzione si può fare anche prima di risolvere, confrontando i coefficienti:

Condizione	Rette	Sistema
$a/a' \neq b/b'$	incidenti	determinato: una soluzione
$a/a' = b/b' \neq c/c'$	parallele distinte	impossibile: nessuna soluzione
$a/a' = b/b' = c/c'$	coincidenti	indeterminato: infinite soluzioni

Se durante i calcoli si arriva a un'uguaglianza falsa come $0 = 5$, il sistema è impossibile; se si arriva a un'identità come $0 = 0$, è indeterminato. Non è un errore di conto: è la risposta.

Quattro metodi, lo stesso sistema

Per confrontarli risolviamo sempre lo stesso sistema, quello della figura iniziale. Il risultato dovrà essere ogni volta $(3; 1)$.

$$2x + y = 7$$

$$x$$

$$-$$

$$y = 2$$

1. Metodo di sostituzione

Si ricava un'incognita da un'equazione e la si sostituisce nell'altra, che diventa così di una sola incognita.

$$y = 7 - 2x \text{ ricavo } y \text{ dalla prima}$$

$$x - (7 - 2x) = 2 \text{ sostituisco nella seconda}$$

$$x - 7 + 2x = 2 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$$

$$y = 7 - 2 \cdot 3 = 1 \text{ torno alla prima}$$

È il metodo sempre applicabile, anche a sistemi non lineari. Conviene ricavare l'incognita che ha coefficiente 1 o -1, per evitare le frazioni.

2. Metodo del confronto

Si ricava la *stessa* incognita da entrambe le equazioni e si uguagliano le due espressioni ottenute.

$$y = 7 - 2x \text{ dalla prima}$$

$$y = x - 2 \text{ dalla seconda}$$

$$7 - 2x = x - 2 \text{ confronto}$$

$$9 = 3x \rightarrow x = 3, y = 3 - 2 = 1$$

È la traduzione algebrica del disegno: uguagliare le due y significa cercare il punto in cui le due rette hanno la stessa quota.

3. Metodo di riduzione

Si sommano o si sottraggono le due equazioni, dopo averle eventualmente moltiplicate, in modo che un'incognita sparisca.

$$2x + y = 7$$

+ $x - y = 2$ i termini in y sono opposti

$$3x = 9 \rightarrow x = 3$$

$$3 - y = 2 \rightarrow y = 1$$

Se i coefficienti non sono già opposti o uguali, si moltiplicano le equazioni per numeri opportuni. Per eliminare la x da $3x + 2y = 8$ e $2x - y = 3$, per esempio, si moltiplica la prima per 2 e la seconda per 3.

4. Metodo di Cramer

Si calcolano tre determinanti e le incognite si ottengono come rapporti. È un procedimento meccanico, senza scelte da fare.

Il determinante di una tabella 2×2 è la differenza fra il prodotto della diagonale principale e quello dell'altra:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$$

Si costruiscono il determinante dei coefficienti D e i due determinanti D_x e D_y , ottenuti sostituendo la colonna dell'incognita con quella dei termini noti:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}$$

$$D = 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -3 \text{ coefficienti}$$

$$D_x = 7 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 = -9 \rightarrow x = -9 / -3 = 3$$

$$D_y = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 7 = -3 \rightarrow y = -3 / -3 = 1$$

Il metodo dice anche subito che tipo di sistema si ha: se $D \neq 0$ il sistema è determinato; se $D = 0$ è impossibile quando D_x o D_y non sono nulli, indeterminato quando sono entrambi nulli.

Quale metodo conviene

Metodo	Quando usarlo
Sostituzione	Quando un'incognita ha coefficiente 1 o -1, o è già isolata. Unico metodo che funziona anche con sistemi non lineari.
Confronto	Quando entrambe le equazioni sono già in forma esplicita, del tipo $y = \dots$
Riduzione	Quando i coefficienti di un'incognita sono uguali, opposti o facilmente riducibili tali. Di solito è il più rapido.
Cramer	Quando i coefficienti sono scomodi, o serve una procedura automatica. Si estende bene ai sistemi di tre equazioni.

I quattro metodi non sono alternative in competizione: danno per forza lo stesso risultato, perché sono tutti conseguenza dei principi di equivalenza. Cambia solo la quantità di calcoli.

Un problema da tradurre

La difficoltà vera raramente sta nel risolvere il sistema: sta nello scriverlo a partire dal testo. Il passaggio chiave è decidere che cosa rappresentano le incognite.

In un cortile ci sono galline e conigli: in tutto 12 animali e 34 zampe. Quanti sono gli uni e gli altri?

$x = \text{numero di galline}, y = \text{numero di conigli}$

$x + y = 12$ totale animali

$2x + 4y = 34$ le galline hanno 2 zampe, i conigli 4

$x = 12 - y \rightarrow 2(12 - y) + 4y = 34$

$24 + 2y = 34 \rightarrow y = 5, x = 7$

Alla fine va sempre controllato che la soluzione abbia senso nel problema: qui devono venire numeri interi e positivi, perché contano animali. Un risultato come $y = 5,5$ segnalerebbe un errore o un testo mal posto.

Errori da evitare

- Fermarsi a metà: trovata la x , manca ancora la y . La soluzione è la coppia, non un numero solo.
- Nella sostituzione, dimenticare le parentesi: $x - 7 - 2x$ al posto di $x - (7 - 2x)$ cambia il segno di tutto.
- Nella riduzione, moltiplicare solo una parte dell'equazione: il fattore va applicato a *tutti* i termini, termine noto compreso.
- Interpretare $0 = 0$ o $0 = 5$ come un errore: sono le risposte dei sistemi indeterminati e impossibili.
- In Cramer, invertire l'ordine dei prodotti: il determinante è diagonale principale *meno* diagonale secondaria.

Da tenere a mente

- La soluzione di un sistema di due equazioni in due incognite è una **coppia ordinata**, non un numero.
- Geometricamente: una soluzione = rette incidenti, nessuna = parallele, infinite = coincidenti.
- Sostituzione, confronto, riduzione e Cramer portano tutti allo stesso risultato: si sceglie il più comodo.
- Cramer: $x = D_x/D$ e $y = D_y/D$, con $D \neq 0$.
- La verifica finale si fa sostituendo la coppia trovata in **entrambe** le equazioni di partenza.
- Nei problemi, si scrive prima che cosa rappresentano le incognite: metà del lavoro è lì.